EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Unité graphique 2 cm.
On appelle A le point d'affixe $-2i$.
A tout point M du plan d'affixe z, on associe le point M' d'affixe

$$z' = -2\overline{z} + 2i.$$

1) On considère le point B d'affixe $b = 3 - 2i$.
Déterminer la forme algébrique des affixes a' et b' des points A' et B' associés respectivement aux points A et B. Placer ces points sur le dessin.

2) Montrer que si M appartient à la droite (Δ) d'équation $y = -2$ alors M' appartient aussi à (Δ).

3) Démontrer que pour tout point M d'affixe z, $|z' + 2i| = 2|z + 2i|$; interprétez géométriquement cette égalité.

4) Pour tout point M distinct de A, on appelle θ un argument de $z + 2i$.

a) Justifier que θ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM})$.

b) Démontrer que $(z + 2i)(z' + 2i)$ est un réel négatif ou nul.

c) En déduire un argument de $z' + 2i$ en fonction de θ.

d) Que peut-on en déduire pour les demi-droites $[AM)$ et $[AM')$?

5) En utilisant les résultats précédents, proposer une construction géométrique du point M' associé au point M.

BACCALAUREAT GENERAL

Session 2004

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Centres étrangers

EXERCICE 1

1.

$$a' = -2\overline{a} + 2i = -2(2i) + 2i = -2i,$$

et

$$b' = -2\overline{b} + 2i = -2(3 + 2i) + 2i = -6 - 2i.$$

$$\boxed{a' = a = -2i \text{ et } b' = -6 - 2i.}$$

2. Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z. Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

$$z' = -2(x - iy) + 2i = -2x + i(2y + 2).$$

Ainsi, M' est le point de coordonnées (x', y') où $x' = -2x$ et $y' = 2y + 2$. Mais alors, si le point M appartient à la droite (Δ) alors $y = -2$ et donc $y' = 2(-2) + 2 = -2$ ce qui montre que le point M' appartient aussi à la droite (Δ).

$$\boxed{\text{Si le point } M \text{ appartient à la droite } (\Delta) \text{ d'équation } y = -2 \text{, le point } M' \text{ appartient à } (\Delta).}$$

3. Soit z un nombre complexe.

$$|z' + 2i| = |-2\overline{z} + 4i| = |-2(\overline{z} - 2i)| = |-2| \times |\overline{z} - 2i| = 2\left|\overline{z + 2i}\right| = 2|z + 2i|.$$

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ d'affixe } z \text{, on a } |z' + 2i| = 2|z + 2i|.}$$

Géométriquement, cela signifie que $AM' = 2AM$.

4. a. On sait qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}\right)$ est $\arg(z - z_A)$ ou encore $\arg(z + 2i)$ c'est-à-dire θ.
b. Soit z un nombre complexe.

$$(z + 2i)(z' + 2i) = (z + 2i)(-2\overline{z} + 4i) = -2(z + 2i)(\overline{z} - 2i) = -2(z + 2i)\overline{(z + 2i)} = -2|z + 2i|^2,$$

et comme $|z + 2i|^2$ est un réel positif ou nul, on a montré que

$$\boxed{(z + 2i)(z' + 2i) \text{ est un réel négatif ou nul.}}$$

c. Soit z un nombre complexe. Si $z = -2i$, la question 1. montre que $z' = -2i$. Réciproquement, si $z' = -2i$, alors $(z + 2i)(z' + 2i) = 0$ puis $-2|z + 2i|^2 = 0$ puis $z + 2i = 0$ et donc $z = -2i$. Finalement,

$$\text{pour tout nombre complexe } z, \ (z = -2i \Leftrightarrow z' = -2i).$$

Dans cette question, $M \neq A$ et donc $z \neq -2i$. Puisque $(z + 2i)(z' + 2i)$ est un réel strictement négatif, on a $\arg(z + 2i)(z' + 2i) = \pi\ [2\pi]$ ou encore $\arg(z + 2i) + \arg(z' + 2i) = \pi\ [2\pi]$ ou enfin $\arg(z' + 2i) = \pi - \arg(z + 2i) = \pi - \theta\ [2\pi]$.

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ distinct de } A,\ \arg(z' + 2i) = \pi - \theta\ [2\pi].}$$

d. Par suite, pour tout point M distinct de A, $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM'}\right) = \pi - \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}\right)$ $[2\pi]$. On en déduit que la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ est bissectrice des demi-droites $[AM)$ et $[AM')$ ou encore que les demi-droites $[AM)$ et $[AM')$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

5. Si $M = A$, alors $M' = A$. Sinon, un point M distinct de A étant donné, on construit la symétrique de la demi-droite $[AM)$ par rapport à l'axe des ordonnées et M' est le point de cette demi-droite vérifiant $AM' = 2AM$.