BACCALAUREAT GENERAL

Session 2004
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement Obligatoire
Centres étrangers

EXERCICE 1

1.

$$a' = -2\overline{a} + 2i = -2(2i) + 2i = -2i,$$

et

$$b' = -2\overline{b} + 2i = -2(3 + 2i) + 2i = -6 - 2i.$$

$$\boxed{a' = a = -2i \text{ et } b' = -6 - 2i.}$$

2. Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z. Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

$$z' = -2(x - iy) + 2i = -2x + i(2y + 2).$$

Ainsi, M' est le point de coordonnées (x', y') où $x' = -2x$ et $y' = 2y + 2$. Mais alors, si le point M appartient à la droite (Δ) alors $y = -2$ et donc $y' = 2(-2) + 2 = -2$ ce qui montre que le point M' appartient aussi à la droite (Δ).

$$\boxed{\text{Si le point } M \text{ appartient à la droite } (\Delta) \text{ d'équation } y = -2, \text{ le point } M' \text{ appartient à } (\Delta).}$$

3. Soit z un nombre complexe.

$$|z' + 2i| = |-2\overline{z} + 4i| = |-2(\overline{z} - 2i)| = |-2| \times |\overline{z} - 2i| = 2\left|\overline{z + 2i}\right| = 2|z + 2i|.$$

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ d'affixe } z, \text{ on a } |z' + 2i| = 2|z + 2i|.}$$

Géométriquement, cela signifie que $AM' = 2AM$.

4. a. On sait qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}\right)$ est $\arg(z - z_A)$ ou encore $\arg(z + 2i)$ c'est-à-dire θ.
b. Soit z un nombre complexe.

$$(z + 2i)(z' + 2i) = (z + 2i)(-2\overline{z} + 4i) = -2(z + 2i)(\overline{z} - 2i) = -2(z + 2i)\overline{(z + 2i)} = -2|z + 2i|^2,$$

et comme $|z + 2i|^2$ est un réel positif ou nul, on a montré que

$$\boxed{(z + 2i)(z' + 2i) \text{ est un réel négatif ou nul.}}$$

c. Soit z un nombre complexe. Si $z = -2i$, la question 1. montre que $z' = -2i$. Réciproquement, si $z' = -2i$, alors $(z + 2i)(z' + 2i) = 0$ puis $-2|z + 2i|^2 = 0$ puis $z + 2i = 0$ et donc $z = -2i$. Finalement,

$$\text{pour tout nombre complexe } z, \ (z = -2i \Leftrightarrow z' = -2i).$$

Dans cette question, $M \neq A$ et donc $z \neq -2i$. Puisque $(z+2i)(z'+2i)$ est un réel strictement négatif, on a $\arg(z+2i)(z'+2i) = \pi \ [2\pi]$ ou encore $\arg(z + 2i) + \arg(z' + 2i) = \pi \ [2\pi]$ ou enfin $\arg(z' + 2i) = \pi - \arg(z + 2i) = \pi - \theta \ [2\pi]$.

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ distinct de } A,\ \arg(z'+2i) = \pi - \theta\ [2\pi].}$$

d. Par suite, pour tout point M distinct de A, $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM'}\right) = \pi - \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}\right)$ $[2\pi]$. On en déduit que la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ est bissectrice des demi-droites $[AM)$ et $[AM')$ ou encore que les demi-droites $[AM)$ et $[AM')$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

5. Si $M = A$, alors $M' = A$. Sinon, un point M distinct de A étant donné, on construit la symétrique de la demi-droite $[AM)$ par rapport à l'axe des ordonnées et M' est le point de cette demi-droite vérifiant $AM' = 2AM$.