

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

- 1) Montrer que $(1 + i)^6 = -8i$.
- 2) On considère l'équation $(E) : z^2 = -8i$.
 - a) Dédurre de **1**) une solution de l'équation (E) .
 - b) L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.
- 3) Dédurre également de **1**) une solution de l'équation $(E') : z^3 = -8i$.
- 4) On considère le point A d'affixe $2i$ et la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
 - a) Déterminer l'affixe b du point B , image de A par r , ainsi que l'affixe c du point C , image de B par r .
 - b) Montrer que b et c sont solutions de (E') .
- 5)
 - a) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique 2 cm), représenter les points A , B et C .
 - b) Quelle est la nature de la figure que forment les images de ces solutions ?
 - c) Déterminer le centre de gravité de cette figure.

EXERCICE 2

1) **1ère solution.** D'après la formule du binôme de NEWTON, on a

$$\begin{aligned}(1+i)^6 &= \binom{6}{0}1^6i^0 + \binom{6}{1}1^5i^1 + \binom{6}{2}1^4i^2 + \binom{6}{3}1^3i^3 + \binom{6}{4}1^2i^4 + \binom{6}{5}1^1i^5 + \binom{6}{6}1^0i^6 \\ &= 1 + 6i - 15 - 20i + 15 + 6i - 1 = -8i.\end{aligned}$$

2ème solution. Mettons $1+i$ sous forme trigonométrique et pour cela calculons d'abord le module de $1+i$.

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

Mais alors,

$$1+i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

Par suite,

$$(1+i)^6 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^6 = (\sqrt{2})^6 e^{6i\pi/4} = 8.e^{3i\pi/2} = 8 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right) = -8i.$$

On a montré que

$$(1+i)^6 = -8i.$$

2) **a)** D'après 1), $((1+i)^3)^2 = (1+i)^6 = -8i$. Une solution de l'équation (E) est donc $(1+i)^3$. Or,

$$(1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i,$$

et donc

$$\text{une solution de l'équation (E) est } -2 + 2i.$$

b) Soit z un nombre complexe.

$$\begin{aligned}z^2 = -8i &\Leftrightarrow z^2 = (-2+2i)^2 \Leftrightarrow z^2 - (-2+2i)^2 = 0 \Leftrightarrow (z - (-2+2i))(z - (2-2i)) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = -2+2i \text{ ou } z = 2-2i.\end{aligned}$$

$$\text{les solutions de l'équation (E) sont } -2+2i \text{ et } 2-2i.$$

3) La question 1) fournit aussi $((1+i)^2)^3 = (1+i)^6 = -8i$ avec $(1+i)^2 = 1+2i-i^2 = 2i$. Donc

$$\text{une solution de l'équation (E')} \text{ est } 2i.$$

4) **a)** L'expression complexe de la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est

$$z' = e^{2i\pi/3}z = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z.$$

Par suite,

$$b = e^{2i\pi/3}a = 2i \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} - i,$$

puis

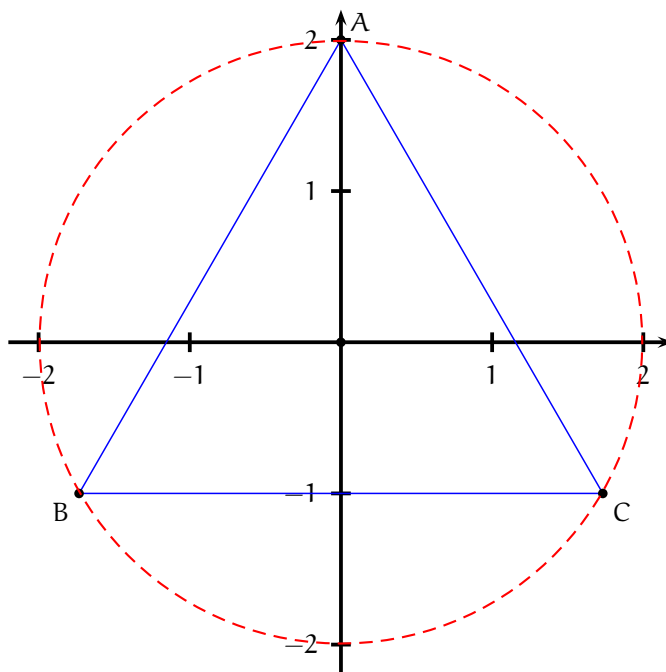
$$c = e^{2i\pi/3}b = e^{2i\pi/3} \times e^{2i\pi/3}a = e^{i(2\pi/3+2\pi/3)}a = e^{4i\pi/3}a = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 2i = \sqrt{3} - i.$$

$$b = -\sqrt{3} - i \text{ et } c = \sqrt{3} - i.$$

b) $b^3 = (e^{2i\pi/3}a)^3 = (e^{2i\pi/3})^3 \times a^3 = e^{2i\pi} \times (-8i) = -8i$ et $c^3 = (e^{4i\pi/3}a)^3 = (e^{4i\pi/3})^3 \times a^3 = e^{4i\pi} \times (-8i) = -8i$.
Donc

$$b \text{ et } c \text{ sont solutions de l'équation (E').}$$

5) a)



b) Notons tout d'abord que l'on a aussi $r(C) = A$ car $e^{2i\pi/3}c = e^{2i\pi/3}(e^{2i\pi/3})^2a = e^{2i\pi}a = a$.
Maintenant, on sait qu'une rotation est une isométrie. Donc

$$BC = r(A)r(B) = AB,$$

et de même,

$$CA = r(B)r(C) = BC.$$

Ainsi, $AB = BC = CA$ et donc

$$\text{le triangle } ABC \text{ est un triangle équilatéral.}$$

c) Calculons l'affixe du centre de gravité du triangle ABC.

$$\frac{1}{3}(a + b + c) = \frac{1}{3}(2i - \sqrt{3} - i + \sqrt{3} - i) = 0.$$

Donc

$$\text{le triangle } ABC \text{ est un triangle équilatéral de centre } O.$$