EXERCICE 2

1) **1ère solution.** D'après la formule du binôme de NEWTON, on a

$$\begin{aligned}(1+i)^6 &= \binom{6}{0}1^6i^0 + \binom{6}{1}1^5i^1 + \binom{6}{2}1^4i^2 + \binom{6}{3}1^3i^3 + \binom{6}{4}1^2i^4 + \binom{6}{5}1^1i^5 + \binom{6}{6}1^0i^6\\ &= 1+6i-15-20i+15+6i-1=-8i.\end{aligned}$$

2ème solution. Mettons $1+i$ sous forme trigonométrique et pour cela calculons d'abord le module de $1+i$.

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

Mais alors,

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

Par suite,

$$(1+i)^6 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^6 = (\sqrt{2})^6 e^{6i\pi/4} = 8.e^{3i\pi/2} = 8\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -8i.$$

On a montré que

$$\boxed{(1+i)^6 = -8i.}$$

2) **a)** D'après 1), $\left((1+i)^3\right)^2 = (1+i)^6 = -8i$. Une solution de l'équation (E) est donc $(1+i)^3$. Or,

$$(1+i)^3 = 1+3i+3i^2+i^3 = 1+3i-3-i = -2+2i,$$

et donc

$$\boxed{\text{une solution de l'équation } (E) \text{ est } -2+2i.}$$

b) Soit z un nombre complexe.

$$\begin{aligned}z^2 = -8i &\Leftrightarrow z^2 = (-2+2i)^2 \Leftrightarrow z^2 - (-2+2i)^2 = 0 \Leftrightarrow (z-(-2+2i))(z-(2-2i)) = 0\\ &\Leftrightarrow z = -2+2i \text{ ou } z = 2-2i.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{les solutions de l'équation } (E) \text{ sont } -2+2i \text{ et } 2-2i.}$$

3) La question 1) fournit aussi $\left((1+i)^2\right)^3 = (1+i)^6 = -8i$ avec $(1+i)^2 = 1+2i-i^2 = 2i$. Donc

$$\boxed{\text{une solution de l'équation } (E') \text{ est } 2i.}$$

4) **a)** L'expression complexe de la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ est

$$z' = e^{2i\pi/3}z = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z.$$

Par suite,

$$b = e^{2i\pi/3}a = 2i\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} - i,$$

puis

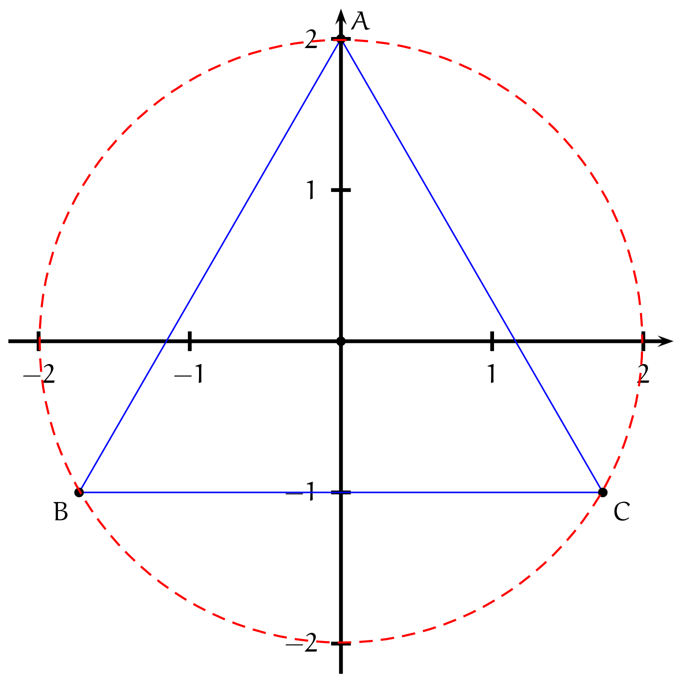
$$c = e^{2i\pi/3}b = e^{2i\pi/3} \times e^{2i\pi/3}a = e^{i(2\pi/3+2\pi/3)}a = e^{4i\pi/3}a = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 2i = \sqrt{3} - i.$$

$$\boxed{b = -\sqrt{3} - i \text{ et } c = \sqrt{3} - i.}$$

b) $b^3 = \left(e^{2i\pi/3}a\right)^3 = \left(e^{2i\pi/3}\right)^3 \times a^3 = e^{2i\pi} \times (-8i) = -8i$ et $c^3 = \left(e^{4i\pi/3}a\right)^3 = \left(e^{4i\pi/3}\right)^3 \times a^3 = e^{4i\pi} \times (-8i) = -8i$. Donc

$$\boxed{b \text{ et } c \text{ sont solutions de l'équation } (E').}$$

5) a)



b) Notons tout d'abord que l'on a aussi $r(C) = A$ car $e^{2i\pi/3}c = e^{2i\pi/3}(e^{2i\pi/3})^2a = e^{2i\pi}a = a$.
Maintenant, on sait qu'une rotation est une isométrie. Donc

$$BC = r(A)r(B) = AB,$$

et de même,

$$CA = r(B)r(C) = BC.$$

Ainsi, $AB = BC = CA$ et donc

$$\boxed{\text{le triangle } ABC \text{ est un triangle équilatéral.}}$$

c) Calculons l'affixe du centre de gravité du triangle ABC.

$$\frac{1}{3}(a + b + c) = \frac{1}{3}(2i - \sqrt{3} - i + \sqrt{3} - i) = 0.$$

Donc

$$\boxed{\text{le triangle } ABC \text{ est un triangle équilatéral de centre } O.}$$

