

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) . On prendra pour unité graphique 2 cm.

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$(z - 2i)(z^2 - 2z + 2) = 0.$$

Donner les solutions sous forme algébrique et sous forme exponentielle (justifier les réponses).

2) Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 + i$ et $z_B = 2i$. A tout nombre complexe z différent de z_A , on associe le complexe

$$z' = \frac{z - 2i}{z - 1 - i}.$$

a) Soit (E) l'ensemble des points M d'affixes z tels que z' soit imaginaire pur.

Montrer que $B \in (E)$.

Déterminer et construire l'ensemble (E) .

3) Soit R la rotation de centre $\Omega \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2} \right)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Calculer l'affixe du point B' , image de B par R et l'affixe du point I' , image par R du point $I \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right)$.

b) Quelles sont les images de (E) et (F) par R ?

EXERCICE 2

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On note \mathcal{S} l'ensemble des solutions de l'équation proposée.

Soit z un nombre complexe. $(z - 2i)(z^2 - 2z + 2) = 0 \Leftrightarrow z - 2i = 0$ ou $z^2 - 2z + 2 = 0$.

Calculons le discriminant de l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 = -4 = (2i)^2$. L'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$ admet deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_1 = \frac{2+2i}{2} = 1+i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1-i$. Finalement,

$$\mathcal{S} = \{2i, 1+i, 1-i\}.$$

Ensuite, $2i = 2(0 + 1 \times i) = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$. Puis

$$1+i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

et $1-i = \overline{2e^{i\frac{\pi}{4}}} = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Finalement

$$2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}, 1+i = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } 1-i = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

2. a. Si $z = z_B = 2i$, alors $z' = 0$. Comme 0 est un imaginaire pur,

$$B \in (E).$$

Soit maintenant M un point du plan distinct de A et de B . On note z l'affixe de M de sorte que $z \neq z_A$ et $z \neq z_B$.

$$\begin{aligned} M \in (E) &\Leftrightarrow \frac{z-2i}{z-(1+i)} \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \frac{z-z_B}{z-z_A} \text{ est imaginaire pur} \\ &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ à } k\pi \text{ près, } k \in \mathbb{Z} \text{ (car } z \neq z_B) \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} \text{ à } k\pi \text{ près, } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle de diamètre } [AB] \text{ (privé de } A \text{ et de } B). \end{aligned}$$

En résumé, pour tout point M du plan, M est dans (E) si et seulement si ou bien $M = B$ ou bien M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et de B . L'ensemble (E) est donc le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A .

$$(E) \text{ est le cercle de diamètre } [AB] \text{ privé du point } A.$$

Voir figure à la fin de l'exercice.

b. Le point A n'appartient pas à (F) .

Soit maintenant M un point du plan distinct de A . On note z l'affixe de M de sorte que $z \neq z_A$.

$$\begin{aligned} M \in (F) &\Leftrightarrow \left| \frac{z-2i}{z-1-i} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-2i|}{|z-(1+i)|} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{MB}{MA} = 1 \Leftrightarrow MA = MB \\ &\Leftrightarrow M \text{ appartient à la médiatrice du segment } [AB]. \end{aligned}$$

Ainsi, (F) est la médiatrice de $[AB]$ privée du point A . Comme A n'est pas sur cette médiatrice,

$$(F) \text{ est la médiatrice du segment } [AB].$$

3. a. L'expression complexe de la rotation R de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est

$$z' = z_{\Omega} + e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_{\Omega}) = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i + i(z - \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i) = iz + 4 + i.$$

Donc

$$z_{B'} = i(2i) + 4 + i = 2 + i \text{ et } z_{I'} = i(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i) + 4 + i = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}i.$$

$$B'(2, 1) \text{ et } I'(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}).$$

b. I est le milieu du segment [AB]. (E) est donc le cercle de centre I passant par B et privé de A. On en déduit que $R((E))$ est le cercle de centre $R(I) = I'$ passant par $R(B) = B'$ et privé de $R(A) = A'$.

Ensuite

$$A\Omega = \left| \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i \right) - (1 + i) \right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

et

$$B\Omega = \left| \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i \right) - (2i) \right| = \left| \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}.$$

Donc $A\Omega = B\Omega$. Ainsi, le point Ω est sur la médiatrice du segment [AB]. Comme le point I est également sur cette médiatrice, l'ensemble (F) est la droite (ΩI) . Mais alors, $R((F))$ est la droite $(R(\Omega)R(I))$ ou encore la droite $(\Omega I')$.

$R((E))$ est le cercle de centre I' passant par B' et privé de A' et $R((F))$ est la droite $(\Omega I')$.

