EXERCICE 2
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation proposée.
Soit z un nombre complexe. $(z-2i)(z^2-2z+2)=0 \Leftrightarrow z-2i=0$ ou $z^2-2z+2=0$.
Calculons le discriminant de l'équation $z^2-2z+2=0$. $\Delta=(-2)^2-4\times 2=-4=(2i)^2$. L'équation $z^2-2z+2=0$ admet deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_1=\dfrac{2+2i}{2}=1+i$ et $z_2=\overline{z_1}=1-i$. Finalement,

$$\boxed{\mathscr{S}=\{2i, 1+i, 1-i\}.}$$

Ensuite, $2i=2(0+1\times i)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=2e^{i\frac{\pi}{2}}$. Puis

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

et $1-i=\overline{2e^{i\frac{\pi}{4}}}=2e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Finalement

$$\boxed{2i=2e^{i\frac{\pi}{2}},\ 1+i=2e^{i\frac{\pi}{4}}\ \text{et}\ 1-i=2e^{-i\frac{\pi}{4}}.}$$

2. **a.** Si $z=z_B=2i$, alors $z'=0$. Comme 0 est un imaginaire pur,

$$\boxed{B\in(E).}$$

Soit maintenant M un point du plan distinct de A et de B. On note z l'affixe de M de sorte que $z\neq z_A$ et $z\neq z_B$.

$$\begin{aligned}
M\in(E) &\Leftrightarrow \frac{z-2i}{z-(1+i)}\ \text{est imaginaire pur} \Leftrightarrow \frac{z-z_B}{z-z_A}\ \text{est imaginaire pur}\\
&\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}\ \text{à}\ k\pi\ \text{près},\ k\in\mathbb{Z}\ (\text{car}\ z\neq z_B)\\
&\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}\right)=\frac{\pi}{2}\ \text{à}\ k\pi\ \text{près},\ k\in\mathbb{Z}\\
&\Leftrightarrow M\ \text{appartient au cercle de diamètre [AB] (privé de A et de B).}
\end{aligned}$$

En résumé, pour tout point M du plan, M est dans (E) si et seulement si ou bien $M=B$ ou bien M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et de B. L'ensemble (E) est donc le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A.

$$\boxed{(E)\ \text{est le cercle de diamètre [AB] privé du point A.}}$$

Voir figure à la fin de l'exercice.

b. Le point A n'appartient pas à (F).
Soit maintenant M un point du plan distinct de A. On note z l'affixe de M de sorte que $z\neq z_A$.

$$\begin{aligned}
M\in(F) &\Leftrightarrow \left|\frac{z-2i}{z-1-i}\right|=1 \Leftrightarrow \frac{|z-2i|}{|z-(1+i)|}=1\\
&\Leftrightarrow \frac{MB}{MA}=1 \Leftrightarrow MA=MB\\
&\Leftrightarrow M\ \text{appartient à la médiatrice du segment [AB].}
\end{aligned}$$

Ainsi, (F) est la médiatrice de $[AB]$ privée du point A. Comme A n'est pas sur cette médiatrice,

$$\boxed{(F)\ \text{est la médiatrice du segment [AB].}}$$

3. **a.** L'expression complexe de la rotation R de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est

$$z' = z_\Omega + e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_\Omega) = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i + i(z - \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i) = iz + 4 + i.$$

Donc

$$z_{B'} = i(2i) + 4 + i = 2 + i \text{ et } z_{I'} = i(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i) + 4 + i = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}i.$$

$$\boxed{B'(2,1) \text{ et } I'(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}).}$$

b. I est le milieu du segment $[AB]$. (E) est donc le cercle de centre I passant par B et privé de A. On en déduit que $R((E))$ est le cercle de centre $R(I) = I'$ passant par $R(B) = B'$ et privé de $R(A) = A'$.

Ensuite

$$A\Omega = \left|\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i\right) - (1+i)\right| = \left|\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

et

$$B\Omega = \left|\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i\right) - (2i)\right| = \left|\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}.$$

Donc $A\Omega = B\Omega$. Ainsi, le point Ω est sur la médiatrice du segment $[AB]$. Comme le point I est également sur cette médiatrice, l'ensemble (F) est la droite (ΩI). Mais alors, $R((F))$ est la droite $(R(\Omega)R(I))$ ou encore la droite $(\Omega I')$.

$$\boxed{R((E)) \text{ est le cercle de centre } I' \text{ passant par } B' \text{ et privé de } A' \text{ et } R((F)) \text{ est la droite } (\Omega I').}$$