EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = z^2 - 4z.$$

1) Soient A et B les points d'affixes $z_A = 1 - i$ et $z_B = 3 + i$.

a) Calculer les affixes des points A' et B' images des points A et B par f.

b) On suppose que deux points ont la même image par f. Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.

2) Soit I le point d'affixe -3.

a) Démontrer que $OMIM'$ est un parallélogramme si et seulement si $z^2 - 3z + 3 = 0$.

b) Résoudre l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$.

3) **a)** Exprimer $(z' + 4)$ en fonction de $(z - 2)$. En déduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$ puis entre arg$(z' + 4)$ et arg$(z - 2)$.

b) On considère les points J et K d'affixes respectives $z_J = 2$ et $z_K = -4$.
Démontrer que tous les points M du cercle $(\mathcal{C})$ de centre J et de rayon 2 ont leur image M' sur un même cercle que l'on déterminera.

c) Soit E le point d'affixe $z_E = -4 - 3i$.
Donner la forme trigonométrique de $(z_E + 4)$ et à l'aide du **3)a)** démontrer qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E.
Préciser sous forme algébrique l'affixe de ces deux points.

BACCALAUREAT GENERAL

Session 2004

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Nouvelle Calédonie

EXERCICE 1

1) a) $z_{A'} = (1-i)^2 - 4(1-i) = 1 - 2i + i^2 - 4 + 4i = -4 + 2i$ et $z_{B'} = (3+i)^2 - 4(3+i) = 9 + 6i + i^2 - 12 - 4i = -4 + 2i$.

$$\boxed{z_{A'} = z_{B'} = -4 + 2i.}$$

b) Soient M_1 et M_2 deux points du plan dont les affixes respectives sont notées z_1 et z_2.

$$\begin{aligned} f(M_1) = f(M_2) &\Leftrightarrow z_1^2 - 4z_1 = z_2^2 - 4z_2 \Leftrightarrow (z_1^2 - z_2)^2 - 4(z_1 - z_2) = 0 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)(z_1 - z_2) - 4(z_1 - z_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (z_1 - z_2)(z_1 + z_2 - 4) = 0 \Leftrightarrow z_2 = z_1 \text{ ou } z_2 = 4 - z_1. \end{aligned}$$

Maintenant, si Ω est un point quelconque, l'expression complexe de la symétrie centrale de centre Ω est $z' = 2z_\Omega - z$. Ainsi $z_2 = 4 - z_1$ équivaut à M_2 est l'image de M_1 par la symétrie centrale de centre le point Ω d'affixe 2.

$$\boxed{f(M_1) = f(M_2) \Leftrightarrow M_2 = M_1 \text{ ou } M_2 \text{ est l'image de } M_1 \text{ par la symétrie centrale de centre } \Omega(2,0).}$$

2) a) Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z.

$$\begin{aligned} OMIM' \text{ est un parallélogramme} &\Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{MO} \Leftrightarrow z' - (-3) = 0 - z \Leftrightarrow z^2 - 4z + 3 = -z \\ &\Leftrightarrow z^2 - 3z + 3 = 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{OMIM' \text{ est un parallélogramme si et seulement si } z^2 - 3z + 3 = 0.}$$

b) Calculons le discriminant de l'équation (E) : $z^2 - 3z + 3 = 0$. $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 3 = -3 = (i\sqrt{3})^2$. L'équation (E) admet donc deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_1 = \dfrac{3 + i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{3 - i\sqrt{3}}{2}$.

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } z^2 - 3z + 3 = 0 \text{ sont } \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} \text{ et } \frac{3 - i\sqrt{3}}{2}.}$$

3) a) Soit z un nombre complexe.

$$z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2.$$

On en déduit que $|z' + 4| = |(z-2)^2| = ||z-2|^2$ et aussi que pour $z \neq 2$, $\arg(z' + 4) = 2\arg(z - 2)$ à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$.
b) Soit M un point du cercle de centre J et de rayon 2 dont l'affixe est notée z. L'égalité $MJ = 2$ s'écrit aussi $|z - 2| = 2$ et fournit $|z' + 4| = |z - 2|^2 = 4$ ou encore $KM' = 4$.

$$\boxed{\text{Si } M \text{ est sur le cercle de centre } J \text{ et de rayon 2, } f(M) \text{ est sur le cercle de centre } K \text{ et de rayon 4.}}$$

c) $z_E + 4 = -4 - 3i + 4 = -3i = 3(-i) = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z. Puisque $z_E + 4 = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$,

$$\begin{aligned} f(M) = E &\Leftrightarrow z' = z_E \\ &\Leftrightarrow z' + 4 = z_E + 4 \Leftrightarrow |z' + 4| = 3 \text{ et } \arg(z' + 4) = -\frac{\pi}{2} \text{ à } 2k\pi \text{ près, } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Mais alors d'après la question **3)a)**

$$\begin{aligned} f(M) = E &\Leftrightarrow |z - 2|^2 = 3 \text{ et } 2\arg(z - 2) = -\frac{\pi}{2} \text{ à } 2k\pi \text{ près, } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow |z - 2| = \sqrt{3} \text{ et } \arg(z - 2) = -\frac{\pi}{4} \text{ à } k\pi \text{ près, } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow z - 2 = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ ou } z - 2 = \sqrt{3}e^{-i\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right)} \\ &\Leftrightarrow z = 2 + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ ou } z = 2 - \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow z = \frac{4 + \sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ ou } z = \frac{4 - \sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{f(M) = E \text{ si et seulement si } z_M = \frac{4 + \sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ ou } z_M = \frac{4 - \sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}.}$$

