BACCALAUREAT GENERAL

Session 2004

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Nouvelle Calédonie

EXERCICE 1

1) a) $z_{A'} = (1-i)^2 - 4(1-i) = 1 - 2i + i^2 - 4 + 4i = -4 + 2i$ et $z_{B'} = (3+i)^2 - 4(3+i) = 9 + 6i + i^2 - 12 - 4i = -4 + 2i$.

$$\boxed{z_{A'} = z_{B'} = -4 + 2i.}$$

b) Soient M_1 et M_2 deux points du plan dont les affixes respectives sont notées z_1 et z_2.

$$\begin{aligned} f(M_1) = f(M_2) &\Leftrightarrow z_1^2 - 4z_1 = z_2^2 - 4z_2 \Leftrightarrow (z_1^2 - z_2)^2 - 4(z_1 - z_2) = 0 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)(z_1 - z_2) - 4(z_1 - z_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (z_1 - z_2)(z_1 + z_2 - 4) = 0 \Leftrightarrow z_2 = z_1 \text{ ou } z_2 = 4 - z_1. \end{aligned}$$

Maintenant, si Ω est un point quelconque, l'expression complexe de la symétrie centrale de centre Ω est $z' = 2z_\Omega - z$. Ainsi $z_2 = 4 - z_1$ équivaut à M_2 est l'image de M_1 par la symétrie centrale de centre le point Ω d'affixe 2.

$$\boxed{f(M_1) = f(M_2) \Leftrightarrow M_2 = M_1 \text{ ou } M_2 \text{ est l'image de } M_1 \text{ par la symétrie centrale de centre } \Omega(2,0).}$$

2) a) Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z.

$$\begin{aligned} OMIM' \text{ est un parallélogramme} &\Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{MO} \Leftrightarrow z' - (-3) = 0 - z \Leftrightarrow z^2 - 4z + 3 = -z \\ &\Leftrightarrow z^2 - 3z + 3 = 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{OMIM' \text{ est un parallélogramme si et seulement si } z^2 - 3z + 3 = 0.}$$

b) Calculons le discriminant de l'équation (E) : $z^2 - 3z + 3 = 0$. $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 3 = -3 = (i\sqrt{3})^2$. L'équation (E) admet donc deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_1 = \dfrac{3 + i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{3 - i\sqrt{3}}{2}$.

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } z^2 - 3z + 3 = 0 \text{ sont } \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} \text{ et } \frac{3 - i\sqrt{3}}{2}.}$$

3) a) Soit z un nombre complexe.

$$z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2.$$

On en déduit que $|z' + 4| = |(z-2)^2| = ||z-2|^2$ et aussi que pour $z \neq 2$, $\arg(z'+4) = 2\arg(z-2)$ à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$.
b) Soit M un point du cercle de centre J et de rayon 2 dont l'affixe est notée z. L'égalité $MJ = 2$ s'écrit aussi $|z-2| = 2$ et fournit $|z'+4| = |z-2|^2 = 4$ ou encore $KM' = 4$.

$$\boxed{\text{Si } M \text{ est sur le cercle de centre } J \text{ et de rayon 2, } f(M) \text{ est sur le cercle de centre } K \text{ et de rayon 4.}}$$

c) $z_E + 4 = -4 - 3i + 4 = -3i = 3(-i) = 3\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z. Puisque $z_E + 4 = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$,

$$\begin{aligned} f(M) = E &\Leftrightarrow z' = z_E \\ &\Leftrightarrow z' + 4 = z_E + 4 \Leftrightarrow |z' + 4| = 3 \text{ et } \arg(z' + 4) = -\frac{\pi}{2} \text{ à } 2k\pi \text{ près, } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Mais alors d'après la question **3)a)**

$$\begin{aligned} f(M) = E &\Leftrightarrow |z-2|^2 = 3 \text{ et } 2\arg(z-2) = -\frac{\pi}{2} \text{ à } 2k\pi \text{ près, } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow |z-2| = \sqrt{3} \text{ et } \arg(z-2) = -\frac{\pi}{4} \text{ à } k\pi \text{ près, } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow z - 2 = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ ou } z - 2 = \sqrt{3}e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)} \\ &\Leftrightarrow z = 2 + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ ou } z = 2 - \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow z = \frac{4+\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ ou } z = \frac{4-\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{f(M) = E \text{ si et seulement si } z_M = \frac{4+\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ ou } z_M = \frac{4-\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}.}$$

