EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = z^2 - 4z.$$

1) Soient A et B les points d'affixes $z_A = 1 - i$ et $z_B = 3 + i$.

a) Calculer les affixes des points A' et B' images des points A et B par f.

b) On suppose que deux points ont la même image par f. Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.

2) Soit I le point d'affixe -3.

a) Démontrer que $OMIM'$ est un parallélogramme si et seulement si $z^2 - 3z + 3 = 0$.

b) Résoudre l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$.

3) **a)** Exprimer $(z' + 4)$ en fonction de $(z - 2)$. En déduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$ puis entre arg$(z' + 4)$ et arg$(z - 2)$.

b) On considère les points J et K d'affixes respectives $z_J = 2$ et $z_K = -4$.
Démontrer que tous les points M du cercle $(\mathcal{C})$ de centre J et de rayon 2 ont leur image M' sur un même cercle que l'on déterminera.

c) Soit E le point d'affixe $z_E = -4 - 3i$.
Donner la forme trigonométrique de $(z_E + 4)$ et à l'aide du **3)a)** démontrer qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E.
Préciser sous forme algébrique l'affixe de ces deux points.