Exercice 4 (5 points)

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$.
   Les solutions seront notées z' et z'', z' désignant la solution dont la partie imaginaire est positive.
   Donner les solutions sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

2. Donner la valeur exacte de $(z')^{2004}$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$; (unité graphique : 2cm).

1. Montrer que les points A d'affixe $1 + i\sqrt{3}$ et B d'affixe $1 - i\sqrt{3}$ sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.
   Tracer ce cercle puis construire les points A et B.

2. On note O' l'image du point O par la rotation r_1 de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ ·

   et B' l'image du point B par la rotation r_2 de centre A et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$.

   Calculer les affixes des points O' et B' et construire ces points.

3. Soit I le milieu du segment [OB].
   a) Que peut-on conjecturer pour la droite (AI) dans le triangle AO'B' ?
   b) Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AI}$.
   Montrer que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{O'B'}$ est égale à $3\sqrt{3} - i$.
   c) La conjecture émise à la question a) est-elle vraie ?.

EXERCICE 4
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Calculons le discriminant de l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 4 = -12 = (2i\sqrt{3})^2$. L'équation proposée admet donc deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z' = \dfrac{2 + 2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$ et $z'' = \overline{z'} = 1 - i\sqrt{3}$.

$$\boxed{z' = 1 + i\sqrt{3} \text{ et } z'' = 1 - i\sqrt{3}.}$$

Maintenant $z' = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z'' = \overline{z'} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

$$\boxed{z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } z'' = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.}$$

2. $z'^{2004} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2004} = 2^{2004}e^{2004i\frac{\pi}{3}} = 2^{2004}e^{668i\pi} = 2^{2004}e^{i(334\times 2\pi)} = 2^{2004} \times e^{0i}$.

$$\boxed{z'^{2004} = 2^{2004} \times e^{0i}.}$$

Partie B

1. A et B sont les points d'affixes respectives z' et z''. Donc, d'après la question 1., $OA = |z'| = 2$ et $OB = |z''| = 2$.

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont sur le cercle de centre } O \text{ et de rayon } 2.}$$

Voir graphique à la fin de l'exercice.

2. L'expression complexe de la rotation r_1 est $z' = z_A + e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$ ou encore

$$z' = (1 + i\sqrt{3}) - i(z - 1 - i\sqrt{3}) = -iz + 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}).$$

Mais alors

$$z_{O'} = -i \times 0 + 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}) = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}).$$

L'expression complexe de la rotation r_2 est $z' = z_A + e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$ ou encore

$$z' = (1 + i\sqrt{3}) + i(z - 1 - i\sqrt{3}) = iz + 1 + \sqrt{3} + i(-1 + \sqrt{3}).$$

Mais alors

$$z_{B'} = i \times (1 - i\sqrt{3}) + 1 + \sqrt{3} + i(-1 + \sqrt{3}) = 1 + 2\sqrt{3} + i\sqrt{3}.$$

$$\boxed{z_{O'} = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}) \text{ et } z_{B'} = 1 + 2\sqrt{3} + i\sqrt{3}.}$$

3. a) Il semblerait que la droite (AI) soit la hauteur issue de A du triangle $AO'B'$ (voir graphique à la fin).
b) $z_I = \dfrac{1}{2}(z_O + z_B) = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Puis

$$z_{\overrightarrow{AI}} = z_I - z_A = (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) - (1 + i\sqrt{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

D'autre part

$$z_{\overrightarrow{O'B'}} = z_{B'} - z_{O'} = (1 + 2\sqrt{3} + i\sqrt{3}) - (1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})) = 3\sqrt{3} - i.$$

c) Mais alors

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{O'B'} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(3\sqrt{3}\right) + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \times (-1) = 0.$$

Ainsi, la droite (AI) est perpendiculaire à la droite $(O'B')$ ou encore

$$\boxed{\text{la droite } (AI) \text{ est la hauteur issue de } A \text{ du triangle } AO'B'.}$$