EXERCICE 4
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Calculons le discriminant de l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 4 = -12 = (2i\sqrt{3})^2$. L'équation proposée admet donc deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z' = \dfrac{2 + 2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$ et $z'' = \overline{z'} = 1 - i\sqrt{3}$.

$$\boxed{z' = 1 + i\sqrt{3} \text{ et } z'' = 1 - i\sqrt{3}.}$$

Maintenant $z' = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z'' = \overline{z'} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

$$\boxed{z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } z'' = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.}$$

2. $z'^{2004} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2004} = 2^{2004}e^{2004i\frac{\pi}{3}} = 2^{2004}e^{668i\pi} = 2^{2004}e^{i(334\times 2\pi)} = 2^{2004} \times e^{0i}$.

$$\boxed{z'^{2004} = 2^{2004} \times e^{0i}.}$$

Partie B

1. A et B sont les points d'affixes respectives z' et z''. Donc, d'après la question 1., $OA = |z'| = 2$ et $OB = |z''| = 2$.

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont sur le cercle de centre } O \text{ et de rayon } 2.}$$

Voir graphique à la fin de l'exercice.

2. L'expression complexe de la rotation r_1 est $z' = z_A + e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$ ou encore

$$z' = (1 + i\sqrt{3}) - i(z - 1 - i\sqrt{3}) = -iz + 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}).$$

Mais alors

$$z_{O'} = -i \times 0 + 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}) = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}).$$

L'expression complexe de la rotation r_2 est $z' = z_A + e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$ ou encore

$$z' = (1 + i\sqrt{3}) + i(z - 1 - i\sqrt{3}) = iz + 1 + \sqrt{3} + i(-1 + \sqrt{3}).$$

Mais alors

$$z_{B'} = i \times (1 - i\sqrt{3}) + 1 + \sqrt{3} + i(-1 + \sqrt{3}) = 1 + 2\sqrt{3} + i\sqrt{3}.$$

$$\boxed{z_{O'} = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}) \text{ et } z_{B'} = 1 + 2\sqrt{3} + i\sqrt{3}.}$$

3. a) Il semblerait que la droite (AI) soit la hauteur issue de A du triangle $AO'B'$ (voir graphique à la fin).
b) $z_I = \dfrac{1}{2}(z_O + z_B) = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Puis

$$z_{\overrightarrow{AI}} = z_I - z_A = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (1 + i\sqrt{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

D'autre part

$$z_{\overrightarrow{O'B'}} = z_{B'} - z_{O'} = (1 + 2\sqrt{3} + i\sqrt{3}) - (1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})) = 3\sqrt{3} - i.$$

c) Mais alors

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{O'B'} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(3\sqrt{3}\right) + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \times (-1) = 0.$$

Ainsi, la droite (AI) est perpendiculaire à la droite $(O'B')$ ou encore

$$\boxed{\text{la droite } (AI) \text{ est la hauteur issue de } A \text{ du triangle } AO'B'.}$$