EXERCICE 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives i, $1+i$ et $-1+i$.
Soit f l'application qui, à tout point M du plan différent de A, d'affixe z, associe le point M' du plan d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{iz+2}{z-i}.$$

1) **a)** Déterminer les images de B et de C par l'application f.

b) Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de i, on a la relation :

$$(z'-i)(z-i) = 1.$$

c) Soit D le point d'affixe $-1+2i$. Placer les points A, B, C et D sur une figure (unité graphique 4 cm).
Déduire de la question précédente une construction du point D' image du point D par l'application f.

2) Soit R un nombre réel strictement positif.
Quelle est l'image par l'application f du cercle de centre A et de rayon R ?

3) **a)** Montrer que, si l'affixe du point M est un imaginaire pur différent de i, alors l'affixe du point M' est un imaginaire pur. Que signifie ce résultat pour l'image par l'application f de l'axe imaginaire privé du point A ?

b) Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Déterminer l'image de la droite $\mathcal{D}$ privée du point A par l'application f.

EXERCICE 2 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. a. $z'_B = \dfrac{i(1+i)+2}{(1+i)-i} = 1+i$ et $z'_C = \dfrac{i(-1+i)+2}{(-1+i)-i} = \dfrac{1-i}{-1} = -1+i$. Donc

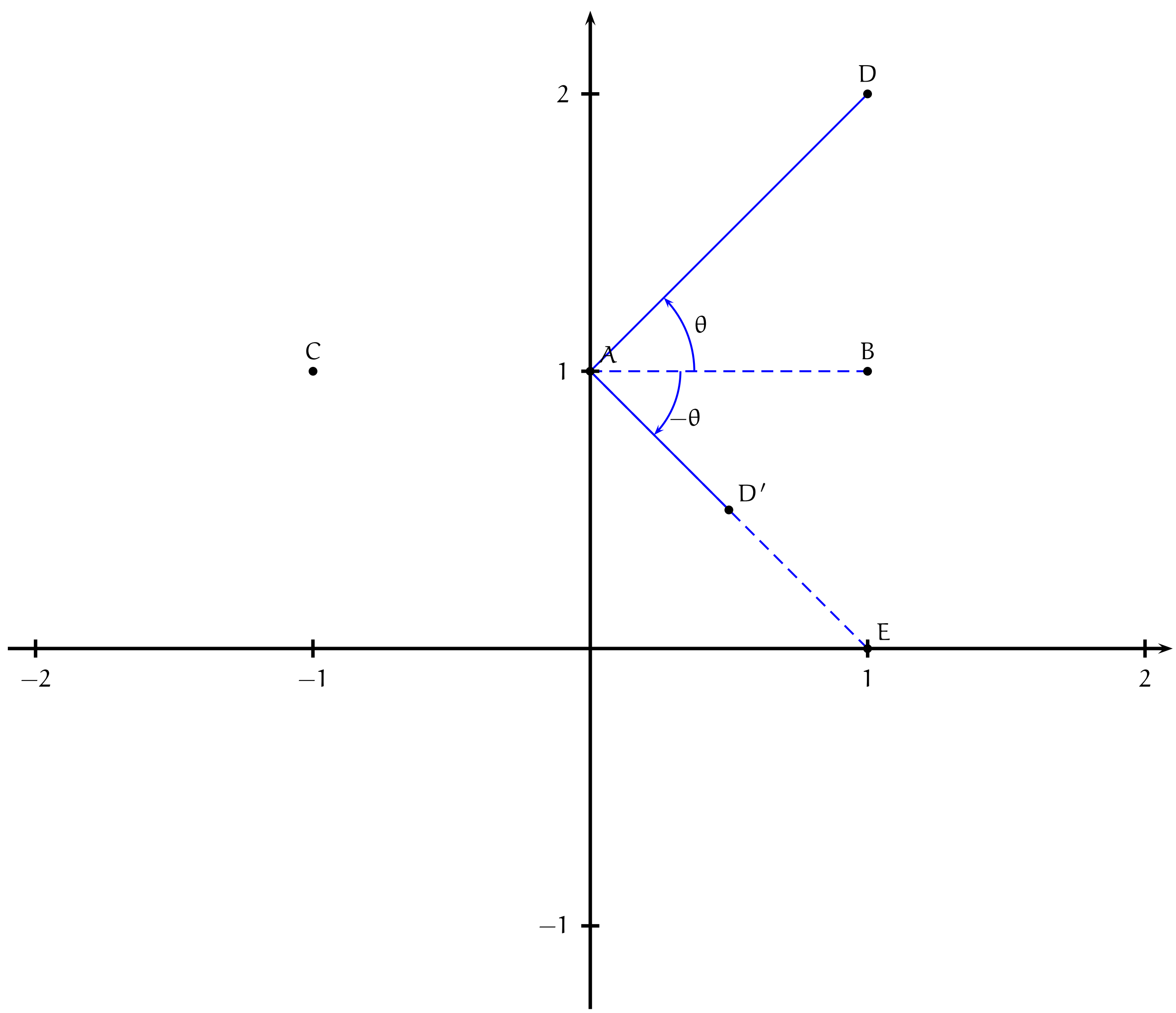
$$\boxed{f(B) = B \text{ et } f(C) = C.}$$

b. Soit z un nombre complexe distinct de i.

$$(z'-i)(z-i) = \left(\frac{iz+2}{z-i} - i\right)(z-i) = (iz+2) - i(z-i) = iz+2-iz-1 = 1.$$

$$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } z \text{ distinct de } i,\ (z'-i)(z-i) = 1.}$$

c.



Notons E le point d'affixe 1. L'égalité $(z'_D - i)(z_D - i) = 1$ fournit $\arg(z'_D - i) + \arg(z_D - i) = \arg(1) = 0$ (à $2k\pi$ près), $k \in \mathbb{Z}$ puis

$$\boxed{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AD'}) = -(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AD}) \text{ à } 2k\pi \text{ près } k \in \mathbb{Z}.}$$

Comme $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, l'égalité d'angles précédente signifie que la demi-droite $[AD')$ est la symétrique de la demi-droite $[AD)$ par rapport à la droite (AB).
Mais d'autre part, E est le symétrique de B par rapport à la droite (AB) et donc la symétrique de la demi-droite $[AD)$ par rapport à la droite (AB) est aussi la demi-droite $[AE)$. En résumé, $[AD') = [AE)$ ce qui signifie que le point D' est sur la demi-droite $[AE)$.

On a aussi $|z'_D - i| \times |z_D - i| = 1$ puis $AD' \times AD = 1$ et donc $AD' = \dfrac{1}{AD}$. Comme AD est la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1, on a $AD = \sqrt{2}$ et donc $AD' = \dfrac{1}{AD} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{1}{2}AE$. Par suite

$$\boxed{D' \text{ est le milieu du segment } [AE].}$$

2. Soit R un réel strictement positif. Le cercle de centre A et de rayon R est l'ensemble des points d'affixes $i + Re^{i\theta}$ où θ décrit $\mathbb{R}$.

Soit donc θ un réel. Posons $z = i + Re^{i\theta}$. D'après la question 1.b., on a $(z' - i)(z - i) = 1$. mais alors $(z' - i) \times Re^{i\theta} = 1$ puis $z' - i = \dfrac{1}{R}e^{-i\theta}$ et finalement

$$z' = i + \frac{1}{R}e^{-i\theta}.$$

Maintenant, quand θ décrit $\mathbb{R}$, $-\theta$ décrit $\mathbb{R}$ et donc

$$\boxed{\text{l'image par } f \text{ du cercle de centre } A \text{ et de rayon } R \text{ est le cercle de centre } A \text{ et de rayon } \frac{1}{R}.}$$

3. **a.** Soient y un réel distinct de 1 puis $z = iy$. Alors

$$z' = \frac{i(iy) + 2}{iy - i} = \frac{1}{i} \times \frac{-y + 2}{y - 1} = -i\frac{-y + 2}{y - 1} = i\frac{y - 2}{y - 1},$$

et z' est bien un imaginaire pur. On en déduit que

$$\boxed{\text{l'image par } f \text{ de la droite } (Oy) \text{ privée du point } A \text{ est contenue dans la droite } (Oy).}$$

b. Notons $\mathcal{D}_1$ la droite $\mathcal{D}$ privée de A. Les points de $\mathcal{D}_1$ sont les points de coordonnées $(x, 1)$, $x \in \mathbb{R}^*$, ou encore les points d'affixes $x + i$, $x \in \mathbb{R}^*$.

Soient donc x un réel non nul puis $z = x + i$. On a $z' - i = \dfrac{1}{z - i} = \dfrac{1}{x}$ puis

$$z' = \frac{1}{x} + i.$$

Maintenant, on sait que quand x décrit $\mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{x}$ décrit $\mathbb{R}^*$. Les points de $f(\mathcal{D}_1)$ sont les points d'affixes $x' + i$, $x' \in \mathbb{R}^*$ ou encore les points de coordonnées $(x', 1)$, $x' \in \mathbb{R}^*$. Finalement

$$\boxed{\text{l'image par } f \text{ de la droite } \mathcal{D} \text{ privée de } A \text{ est la droite } \mathcal{D} \text{ privée de } A.}$$

