

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Soient les points A , B et C d'affixes respectives i , $1 + i$ et $-1 + i$.

Soit f l'application qui, à tout point M du plan différent de A , d'affixe z , associe le point M' du plan d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{iz + 2}{z - i}.$$

- 1) a) Déterminer les images de B et de C par l'application f .
b) Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de i , on a la relation :

$$(z' - i)(z - i) = 1.$$

c) Soit D le point d'affixe $-1 + 2i$. Placer les points A , B , C et D sur une figure (unité graphique 4 cm).

Déduire de la question précédente une construction du point D' image du point D par l'application f .

- 2) Soit R un nombre réel strictement positif.

Quelle est l'image par l'application f du cercle de centre A et de rayon R ?

- 3) a) Montrer que, si l'affixe du point M est un imaginaire pur différent de i , alors l'affixe du point M' est un imaginaire pur. Que signifie ce résultat pour l'image par l'application f de l'axe imaginaire privé du point A ?
b) Soit \mathcal{D} la droite passant par le point A et de vecteur directeur \vec{u} . Déterminer l'image de la droite \mathcal{D} privée du point A par l'application f .