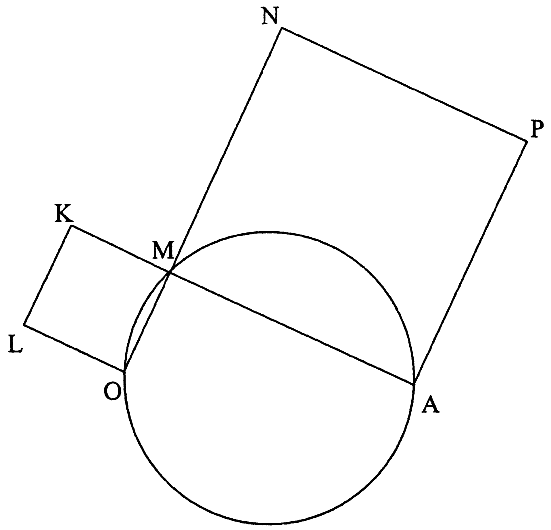
EXERCICE 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés et distincts, le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [OA], un point M variable appartenant au cercle $\mathscr{C}$ et distinct des points O et A, ainsi que les carrés de sens direct MAPN et MKLO. La figure est représentée ci-dessus.

Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et de montrer que le point N appartient à un cercle à déterminer.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On note k, l, m, n et p les affixes respectives des points K, L, M, N et P.

1) Démontrer que, quel que soit le point M choisi sur le cercle $\mathscr{C}$, on a $\left|m-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.

2) Établir les relations suivantes : $l = \mathrm{i}m$ et $p = -\mathrm{i}m + 1 + \mathrm{i}$. On admettra que l'on a également $n = (1-\mathrm{i})m + \mathrm{i}$ et $k = (1+\mathrm{i})m$.

3) **a)** Démontrer que le milieu Ω du segment [PL] est un point indépendant de la position du point M sur le cercle $\mathscr{C}$.
b) Démontrer que le point Ω appartient au cercle $\mathscr{C}$ et préciser sa position sur ce cercle.

4) **a)** Calculer la distance KN et démontrer que cette distance est constante.
b) Quelle est la nature du triangle ΩNK ?

5) Démontrer que le point N appartient à un cercle fixe, indépendant du point M, dont on déterminera le centre et le rayon.

EXERCICE 2

1) Notons I le point d'affixe $\frac{1}{2}$. Puisque $z_I = \frac{z_O + z_A}{2}$, I est le milieu du segment $[OA]$. $\mathscr{C}$ est aussi le cercle de centre I, milieu de $[OA]$, et de rayon $\frac{OA}{2}$ c'est à dire $\frac{1}{2}$.

Pour tout point M de $\mathscr{C}$, on a donc $IM = \frac{1}{2}$ ou encore $\left|m - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{pour tout point } M \text{ de } \mathscr{C},\ \left|m - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}.}$$

2) Puisque le quadrilatère $MKLO$ est un carré de sens direct, L est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On sait que l'expression complexe de cette rotation est $z' = e^{i\pi/2}z$ ou encore $z' = iz$. Donc

$$\boxed{l = im.}$$

De même, P est l'image de M par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On sait que l'expression complexe de cette rotation est $z' - 1 = e^{-i\pi/2}(z - 1)$ ou encore $z' = -iz + 1 + i$. Donc

$$\boxed{p = -im + 1 + i.}$$

L'égalité $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{OM}$ fournit $k = l + m - 0$ ou encore $k = (1 + i)m$. Donc

$$\boxed{k = (1 + i)m.}$$

L'égalité $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AM}$ s'écrit $n = p + m - a$ ou encore $n = -im + 1 + i + m - 1$ ou enfin $n = (1 - i)m + i$. Donc

$$\boxed{n = (1 - i)m + i.}$$

3) a) Notons ω l'affixe du point Ω. On a alors

$$\omega = \frac{p + l}{2} = \frac{-im + 1 + i + im}{2} = \frac{1 + i}{2}.$$

Donc

$$\boxed{\text{pour tout point } M \text{ de } \mathscr{C},\ \Omega \text{ est le point de coordonnées } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).}$$

b) $\left|\omega - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2}|i| = \frac{1}{2}$. D'après la question 1), on en déduit que

$$\boxed{\Omega \in \mathscr{C}.}$$

Le point Ω est le point du cercle $\mathscr{C}$ tel que le triangle $O\Omega A$ soit isocèle rectangle direct (de sommet Ω).

4) a) $KN = |n - k| = |((1 - i)m + i) - (1 + i)m| = |-2im + i| = |-2i| \times \left|m - \frac{1}{2}\right| = 2 \times \frac{1}{2} = 1.$

$$\boxed{KN = 1.}$$

b) On a $n - \omega = (1 - i)m + i - \frac{1}{2}(1 + i) = (1 - i)m - \frac{1}{2}(1 - i)$ et $k - \omega = (1 + i)m - \frac{1}{2}(1 + i)$. Donc

$$k - \omega = i(n - \omega).$$

On en déduit que le point K est l'image du point N par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Par suite

$$\boxed{\text{le triangle } \Omega NK \text{ est isocèle rectangle de sommet } \Omega.}$$

5) Reprenons l'égalité $n - \omega = (1 - i)m - \frac{1}{2}(1 - i)$. On en déduit que

$$|n - \omega| = \left|(1 - i)(m - \frac{1}{2})\right| = |1 - i| \times \left|m - \frac{1}{2}\right| = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Donc

$$\boxed{N \text{ est sur le cercle de centre } \Omega \text{ et de rayon } \frac{1}{\sqrt{2}}.}$$