

EXERCICE 2

1) Notons I le point d'affixe $\frac{1}{2}$. Puisque $z_I = \frac{z_O + z_A}{2}$, I est le milieu du segment [OA]. \mathcal{C} est aussi le cercle de centre I, milieu de [OA], et de rayon $\frac{OA}{2}$ c'est à dire $\frac{1}{2}$.

Pour tout point M de \mathcal{C} , on a donc $IM = \frac{1}{2}$ ou encore $\left| m - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$.

$$\text{pour tout point M de } \mathcal{C}, \left| m - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

2) Puisque le quadrilatère MKLO est un carré de sens direct, L est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On sait que l'expression complexe de cette rotation est $z' = e^{i\pi/2}z$ ou encore $z' = iz$. Donc

$$l = im.$$

De même, P est l'image de M par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On sait que l'expression complexe de cette rotation est $z' - 1 = e^{-i\pi/2}(z - 1)$ ou encore $z' = -iz + 1 + i$. Donc

$$p = -im + 1 + i.$$

L'égalité $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{OM}$ fournit $k = l + m - 0$ ou encore $k = (1 + i)m$. Donc

$$k = (1 + i)m.$$

L'égalité $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AM}$ s'écrit $n = p + m - a$ ou encore $n = -im + 1 + i + m - 1$ ou enfin $n = (1 - i)m + i$. Donc

$$n = (1 - i)m + i.$$

3) a) Notons ω l'affixe du point Ω . On a alors

$$\omega = \frac{p + l}{2} = \frac{-im + 1 + i + im}{2} = \frac{1 + i}{2}.$$

Donc

$$\text{pour tout point M de } \mathcal{C}, \Omega \text{ est le point de coordonnées } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

b) $\left| \omega - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{2}i \right| = \frac{1}{2}|i| = \frac{1}{2}$. D'après la question 1), on en déduit que

$$\Omega \in \mathcal{C}.$$

Le point Ω est le point du cercle \mathcal{C} tel que le triangle $O\Omega A$ soit isocèle rectangle direct (de sommet Ω).

4) a) $KN = |n - k| = |(1 - i)m + i - (1 + i)m| = |-2im + i| = |-2i| \times \left| m - \frac{1}{2} \right| = 2 \times \frac{1}{2} = 1$.

$$KN = 1.$$

b) On a $n - \omega = (1 - i)m + i - \frac{1}{2}(1 + i) = (1 - i)m - \frac{1}{2}(1 - i)$ et $k - \omega = (1 + i)m - \frac{1}{2}(1 + i)$. Donc

$$k - \omega = i(n - \omega).$$

On en déduit que le point K est l'image du point N par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Par suite

le triangle ΩNK est isocèle rectangle de sommet Ω .

5) Reprenons l'égalité $n - \omega = (1 - i)m - \frac{1}{2}(1 - i)$. On en déduit que

$$|n - \omega| = \left| (1 - i) \left(m - \frac{1}{2} \right) \right| = |1 - i| \times \left| m - \frac{1}{2} \right| = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Donc

N est sur le cercle de centre Ω et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

