EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Unité graphique : 0,5cm.
On note j le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$.
Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
Soit B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
Soit C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

1) Placer les points A, B, C, A', B' et C' dans le repère donné.

2) On appelle a', b' et c' les affixes respectives des points A', B' et C'.

a) Calculer a'. On vérifiera que a' est un nombre réel.

b) Montrer que $b' = e^{-i\frac{\pi}{3}}$. En déduire que O est un point de la droite (BB').

c) On admet que $c' = 7 + 7i\sqrt{3}$.
Montrer que les droites (AA'), (BB') et $CC')$ sont concourantes en O.

3) On se propose désormais de montrer que la distance $MA + MB + MC$ est minimale lorsque $M = O$.

a) Calculer la distance $OA + OB + OC$.

b) Montrer que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$.

c) On considère un point M d'affixe z du plan complexe.
On rappelle que $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$.
Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :

$$|(a - z) + (b - z)j^2 + (c - z)j| = |a + bj^2 + cj| = 22.$$

d) On admet que, quels que soient les nombres complexes z, z' et z'' :

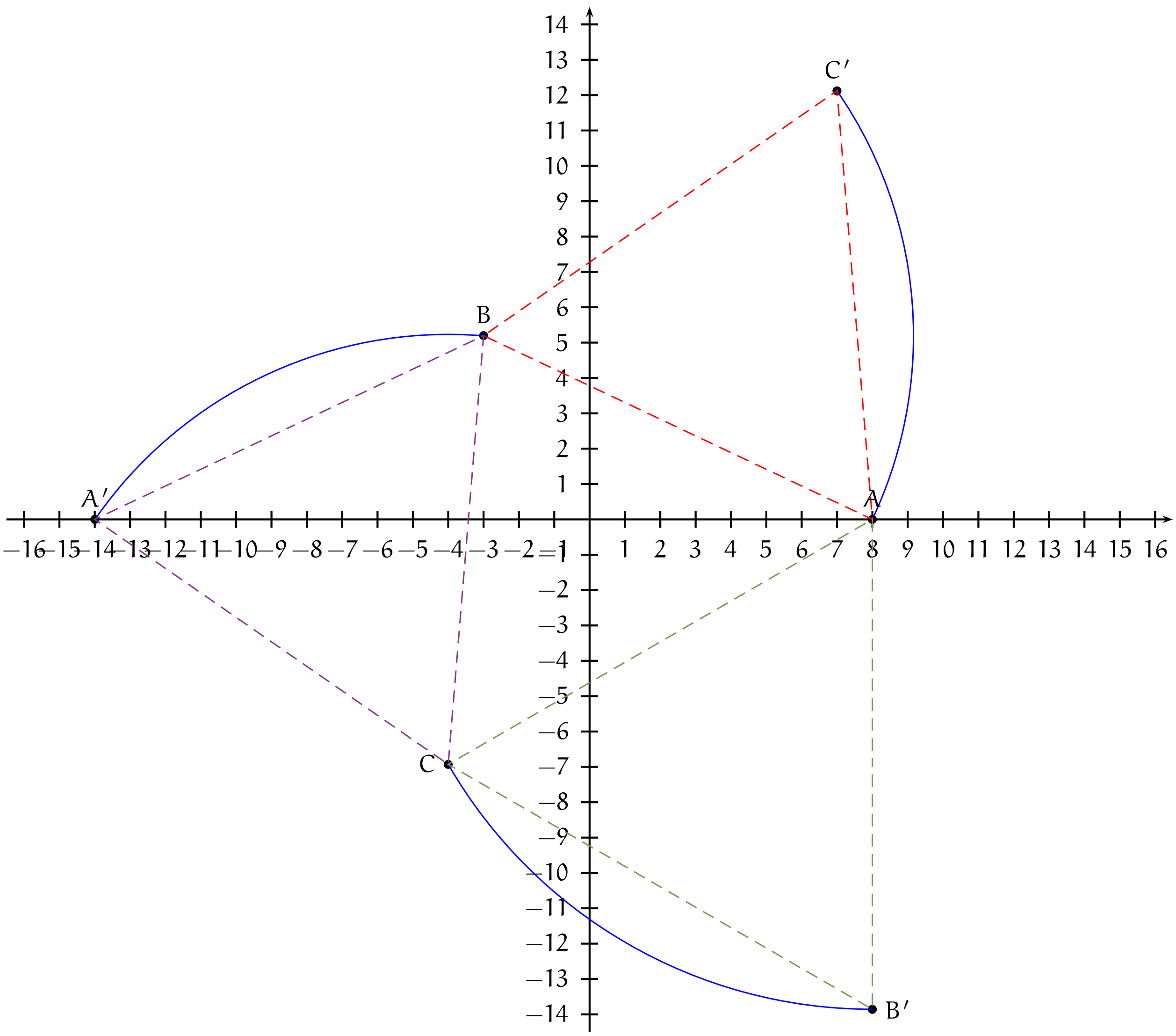
$$|z + z' + z''| \leq |z| + |z'| + |z''|.$$

Montrer que $MA + MB + MC$ est minimale lorsque $M = O$.

EXERCICE 4
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On a $A(8, 0)$, puis $b = 6j = 6e^{2i\pi/3} = 6\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = 6\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3 + 3i\sqrt{3}$ et donc $B(-3, 3\sqrt{3})$.

Enfin $c = 8j^2 = 8(e^{2i\pi/3})^2 = 8e^{4i\pi/3} = 8\left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -4 + 4i\sqrt{3}$ et donc $C(-4, 4\sqrt{3})$.



2. a. Soient θ un réel et Ω un point dont l'affixe est notée ω. Soit r la rotation de centre Ω et d'angle θ. On sait que l'expression complexe de r est

$$z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega).$$

Donc

$$\begin{aligned} a' &= c + e^{i\pi/3}(b - c) = 8e^{4i\pi/3} + e^{i\pi/3}(6e^{2i\pi/3} - 8e^{4i\pi/3}) = 8e^{4i\pi/3} + 6e^{i\pi} - 8e^{5i\pi/3} \\ &= 8\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 6 - 8\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -14. \end{aligned}$$

$$\boxed{a' = -14 \text{ ou encore } A'(-14, 0).}$$

b. De même,

$$\begin{aligned}
b' &= a + e^{i\pi/3}(c-a) = 8 + e^{i\pi/3}(8e^{4i\pi/3} - 8) = 8 + 8e^{5i\pi/3} - 8e^{i\pi/3} \\
&= 8 + 8\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8(1 - i\sqrt{3}) = 16\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= 16\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 16e^{-i\pi/3}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{b' = 16e^{-i\pi/3} \text{ ou encore } B'(8, -8\sqrt{3}).}$$

c. On a $a' = -14 = -\frac{14}{8}.8 = -\frac{7}{4}a$ ou encore $\overrightarrow{OA'} = -\frac{7}{4}\overrightarrow{OA}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires ou encore, le point O appartient à la droite (AA').

$b' = 16e^{-i\pi/3} = 16e^{2i\pi/3 - i\pi} = 16e^{2i\pi/3}e^{-i\pi} = -16e^{2i\pi/3} = -\frac{16}{6}.6e^{2i\pi/3} = -\frac{8}{3}b$. Donc le point O appartient à la droite (BB').

$c' = 7 + 7i\sqrt{3} = 14e^{i\pi/3} = 14e^{4i\pi/3 - i\pi} = -14e^{4i\pi/3} = -\frac{14}{8}.8e^{4i\pi/3} = -\frac{7}{4}c$. Donc le point O appartient à la droite (CC').

$$\boxed{\text{Les droites } (AA'),\ (BB') \text{ et } (CC') \text{ sont concourantes en } O.}$$

3. a. $OA + OB + OC = |a| + |b| + |c| = |8| + \left|6e^{2i\pi/3}\right| + \left|8e^{4i\pi/3}\right| = 8 + 6 + 8 = 22.$

$$\boxed{OA + OB + OC = 22.}$$

b. $j^3 = \left(e^{2i\pi/3}\right)^3 = e^{3.\frac{2i\pi}{3}} = e^{2i\pi} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$ et d'autre part,

$$1 + j + j^2 = 1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

$$\boxed{j^3 = 1 \text{ et } 1 + j + j^2 = 0.}$$

c. Soit z un nombre complexe. Puisque $1 + j + j^2 = 0$, on a

$$\begin{aligned}
|(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| &= |a + bj^2 + cj - (1 + j + j^2)z| = |a + bj^2 + cj| \\
&= |8 + 6j^3 + 8j^3| = |8 + 6 + 8| \text{ (car } j^3 = 1) \\
&= 22.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } z,\ |(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| = |a + bj^2 + cj| = 22.}$$

d. Soit M un point du plan. On note z son affixe. Comme $|j| = |j^2| = 1$, on a

$$|(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| \leq |a-z| + |(b-z)j^2| + |(c-z)j| = |a-z| + |b-z| \times |j^2| + |c-z| \times |j| = \\ |a-z| + |b-z| + |c-z| = MA + MB + MC.$$

Mais d'après la question précédente, $|(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| = 22$ et on a donc montré que

pour tout point M du plan, $MA + MB + MC \geq 22$.

Comme d'autre part, d'après la question a., on a $OA + OB + OC = 22$, l'inégalité précédente est une égalité quand $M = O$. Donc

$$\boxed{MA + MB + MC \text{ est minimale lorsque } M = O.}$$

