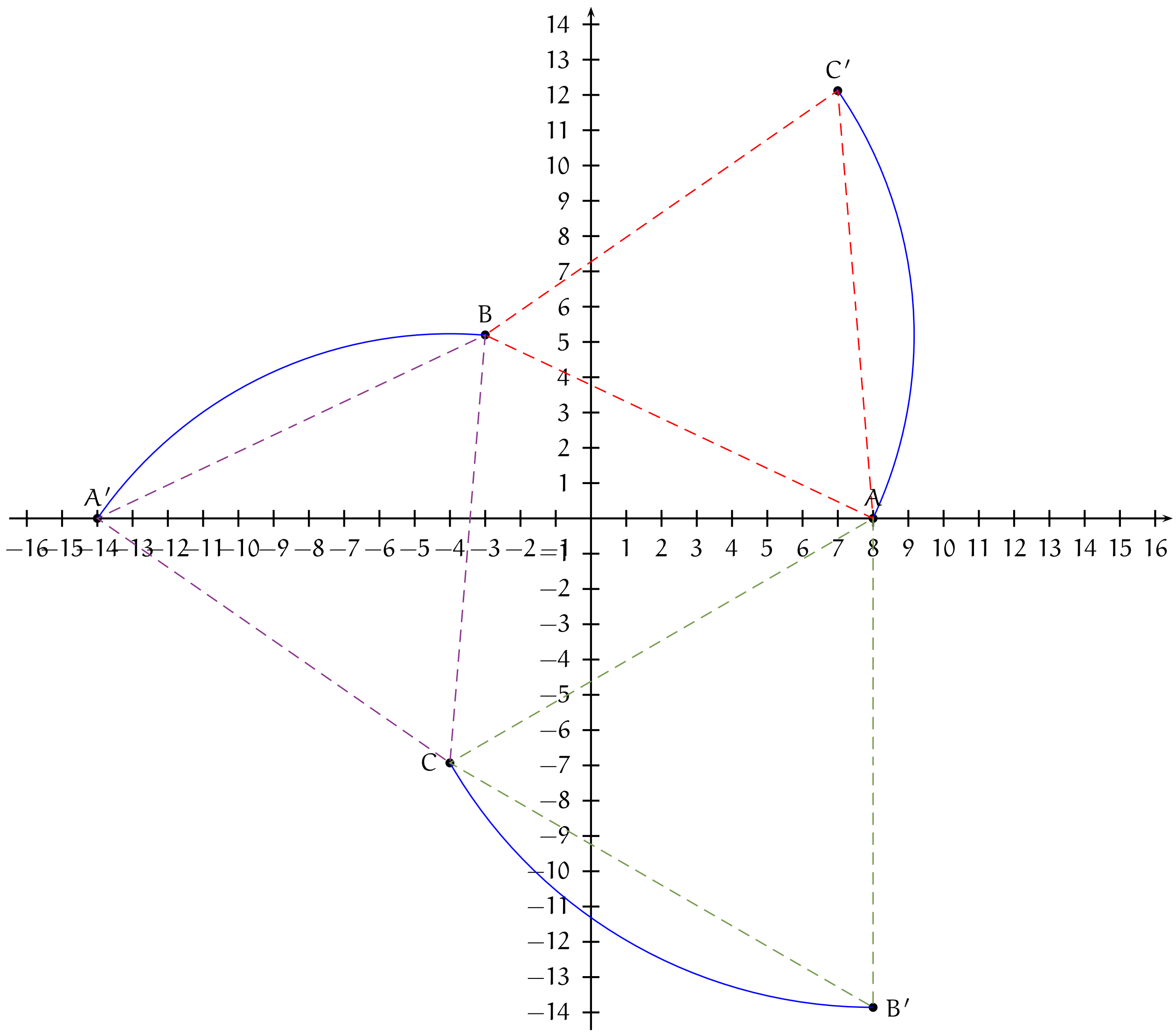
EXERCICE 4
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On a $A(8,0)$, puis $b = 6j = 6e^{2i\pi/3} = 6\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = 6\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3 + 3i\sqrt{3}$ et donc $B(-3, 3\sqrt{3})$.

Enfin $c = 8j^2 = 8(e^{2i\pi/3})^2 = 8e^{4i\pi/3} = 8\left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -4 + 4i\sqrt{3}$ et donc $C(-4, 4\sqrt{3})$.



2. a. Soient θ un réel et Ω un point dont l'affixe est notée ω. Soit r la rotation de centre Ω et d'angle θ. On sait que l'expression complexe de r est

$$z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega).$$

Donc

$$\begin{aligned} a' &= c + e^{i\pi/3}(b - c) = 8e^{4i\pi/3} + e^{i\pi/3}(6e^{2i\pi/3} - 8e^{4i\pi/3}) = 8e^{4i\pi/3} + 6e^{i\pi} - 8e^{5i\pi/3} \\ &= 8\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 6 - 8\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -14. \end{aligned}$$

$$\boxed{a' = -14 \text{ ou encore } A'(-14, 0).}$$

b. De même,

$$\begin{aligned}b' &= a + e^{i\pi/3}(c-a) = 8 + e^{i\pi/3}(8e^{4i\pi/3} - 8) = 8 + 8e^{5i\pi/3} - 8e^{i\pi/3}\\ &= 8 + 8\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8(1 - i\sqrt{3}) = 16\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= 16\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 16e^{-i\pi/3}.\end{aligned}$$

$$\boxed{b' = 16e^{-i\pi/3} \text{ ou encore } B'(8, -8\sqrt{3}).}$$

c. On a $a' = -14 = -\dfrac{14}{8}.8 = -\dfrac{7}{4}a$ ou encore $\overrightarrow{OA'} = -\dfrac{7}{4}\overrightarrow{OA}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires ou encore, le point O appartient à la droite (AA').

$b' = 16e^{-i\pi/3} = 16e^{2i\pi/3 - i\pi} = 16e^{2i\pi/3}e^{-i\pi} = -16e^{2i\pi/3} = -\dfrac{16}{6}.6e^{2i\pi/3} = -\dfrac{8}{3}b$. Donc le point O appartient à la droite (BB').

$c' = 7 + 7i\sqrt{3} = 14e^{i\pi/3} = 14e^{4i\pi/3 - i\pi} = -14e^{4i\pi/3} = -\dfrac{14}{8}.8e^{4i\pi/3} = -\dfrac{7}{4}c$. Donc le point O appartient à la droite (CC').

$$\boxed{\text{Les droites } (AA'), (BB') \text{ et } (CC') \text{ sont concourantes en } O.}$$

3. a. $OA + OB + OC = |a| + |b| + |c| = |8| + \left|6e^{2i\pi/3}\right| + \left|8e^{4i\pi/3}\right| = 8 + 6 + 8 = 22.$

$$\boxed{OA + OB + OC = 22.}$$

b. $j^3 = \left(e^{2i\pi/3}\right)^3 = e^{3.\frac{2i\pi}{3}} = e^{2i\pi} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$ et d'autre part,

$$1 + j + j^2 = 1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

$$\boxed{j^3 = 1 \text{ et } 1 + j + j^2 = 0.}$$

c. Soit z un nombre complexe. Puisque $1 + j + j^2 = 0$, on a

$$\begin{aligned}|(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| &= |a + bj^2 + cj - (1 + j + j^2)z| = |a + bj^2 + cj|\\ &= |8 + 6j^3 + 8j^3| = |8 + 6 + 8| \text{ (car } j^3 = 1)\\ &= 22.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } z,\ |(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| = |a + bj^2 + cj| = 22.}$$

d. Soit M un point du plan. On note z son affixe. Comme $|j| = |j^2| = 1$, on a

$$|(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| \leq |a-z| + |(b-z)j^2| + |(c-z)j| = |a-z| + |b-z| \times |j^2| + |c-z| \times |j| = |a-z| + |b-z| + |c-z| = MA + MB + MC.$$

Mais d'après la question précédente, $|(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| = 22$ et on a donc montré que

$$\text{pour tout point } M \text{ du plan, } MA + MB + MC \geq 22.$$

Comme d'autre part, d'après la question a., on a $OA + OB + OC = 22$, l'inégalité précédente est une égalité quand $M = O$. Donc

$$\boxed{MA + MB + MC \text{ est minimale lorsque } M = O.}$$

