

## EXERCICE 1 (5 points )

*Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité*

Le plan est rapporté au repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Unité graphique : **3 cm**

A tout point  $M$  d'affixe  $z$  du plan, on associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  par l'application  $f$  qui admet pour écriture complexe :

$$z' = \frac{(3 + 4i)z + 5\bar{z}}{6}.$$

1) On considère les points  $A, B, C$  d'affixes respectives  $z_A = 1 + 2i, z_B = 1$  et  $z_C = 3i$ .  
Déterminer les affixes des points  $A', B', C'$  images respectives de  $A, B, C$  par  $f$ .  
Placer les points  $A, B, C, A', B', C'$ .

2) On pose  $z = x + iy$  (avec  $x$  et  $y$  réels).

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de  $z'$  en fonction de  $x$  et  $y$ .

3) Montrer que l'ensemble des points  $M$  invariants par  $f$  est la droite  $(D)$  d'équation  $y = \frac{1}{2}x$ .  
Tracer  $(D)$ . Quelle remarque peut-on faire ?

4) Soit  $M$  un point quelconque du plan et  $M'$  son image par  $f$ . Montrer que  $M'$  appartient à la droite  $(D)$ .

5) a) Montrer que pour tout nombre complexe  $z$  :  $\frac{z' - z}{z_A} = \frac{z + \bar{z}}{6} + i\frac{z - \bar{z}}{3}$ .

En déduire que le nombre  $\frac{z' - z}{z_A}$  est réel.

b) En déduire que, si  $M' \neq M$ , les droites  $(OA)$  et  $(MM')$  sont parallèles.

6) Un point quelconque  $N$  étant donné, comment construire son image  $N'$  ?  
(on étudiera deux cas suivant que  $N$  appartient ou non à  $(D)$ ).  
Effectuer la construction sur la figure.

# BACCALAUREAT GENERAL

Session 2005

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Nouvelle Calédonie

## EXERCICE 1

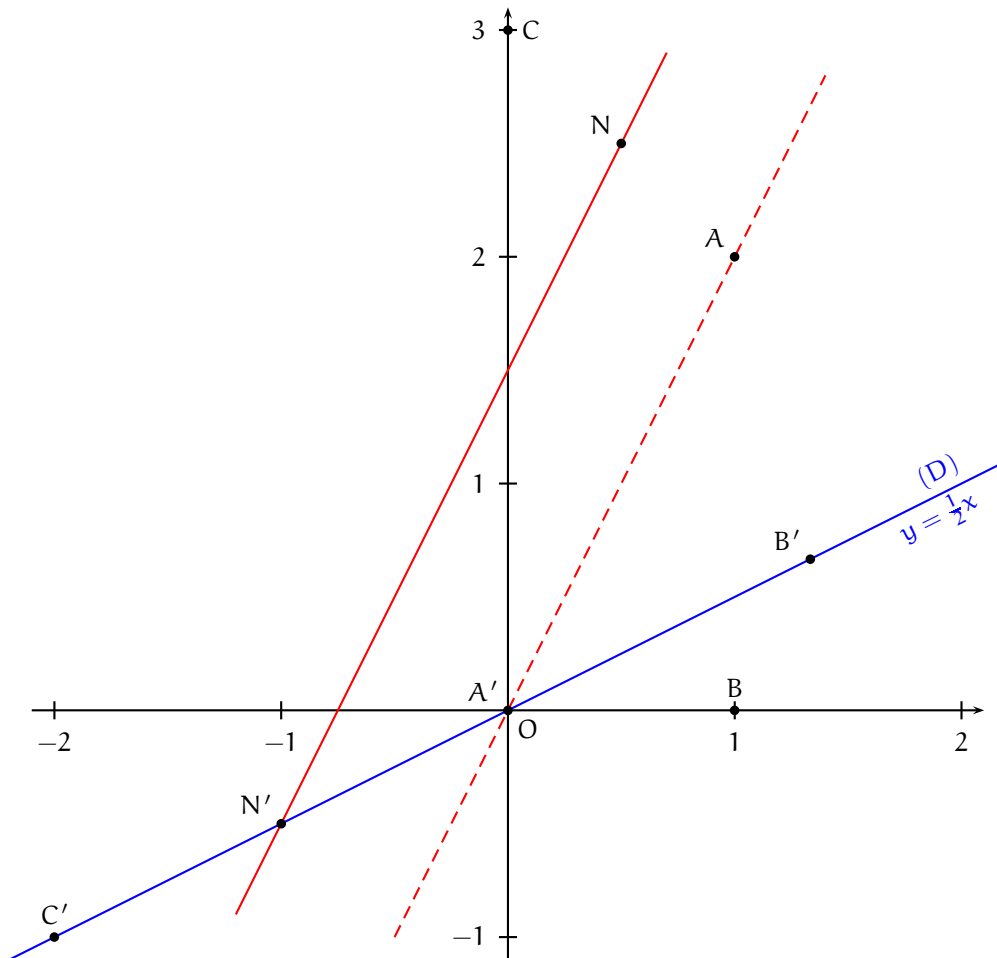
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

$$1^\circ) \text{ Si } z = z_A = 1 + 2i, z' = \frac{1}{6}((3 + 4i)(1 + 2i) + 5(1 - 2i)) = 0.$$

$$\text{Si } z = z_B = 1, z' = \frac{1}{6}((3 + 4i) \times 1 + 5 \times 1) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}i.$$

$$\text{Si } z = z_C = 3i, z' = \frac{1}{6}((3 + 4i) \times 3i + 5 \times (-3i)) = -2 - i.$$

$$A'(0, 0), B'\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ et } C'(-2, -1).$$



2°) Posons encore  $z' = x' + iy'$  où  $x'$  et  $y'$  sont deux réels. On a

$$z' = \frac{1}{6}((3 + 4i)(x + iy) + 5(x - iy)) = \frac{1}{6}((8x - 4y) + i(4x - 2y)) = \frac{1}{3}((4x - 2y) + i(2x - y)).$$

$$x' = \frac{1}{3}(4x - 2y) \text{ et } y' = \frac{1}{3}(2x - y).$$

3°) Soit  $M$  un point du plan. On note  $z$  son affixe puis  $x$  et  $y$  les parties réelles et imaginaires de  $z$  de sorte que  $M(x, y)$ . D'après la question précédente,

$$f(M) = M \Leftrightarrow \frac{1}{3}(4x - 2y) = x \text{ et } \frac{1}{3}(2x - y) = y \Leftrightarrow 4x - 2y = 3x \text{ et } 2x - y = 3y \Leftrightarrow x = 2y \text{ et } 2x = 4y \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x.$$

L'ensemble des points invariants par  $f$  est la droite d'équation  $y = \frac{1}{2}x$ .

On remarque que les images respectives  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  des points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont sur  $(D)$  et sont donc des points invariants par  $f$ .

4°) On a vu à la question 2°) que si  $M$  a pour coordonnées  $(x, y)$  alors  $M' \left( \frac{1}{3}(4x - 2y), \frac{1}{3}(2x - y) \right)$ . Mais alors,  $\frac{1}{2}x_{M'} = \frac{1}{3}(2x - y) = y_{M'}$ . On en déduit que  $M' \in (D)$ .

Pour tout point  $M$  du plan,  $M' = f(M)$  est invariant par  $f$ .

5°) a) Soit  $z$  un nombre complexe.

$$z' - z = \frac{1}{6}((3 + 4i)z + 5\bar{z}) - z = \frac{1}{6}((3 + 4i)z + 5\bar{z} - 6z) = \frac{1}{6}((-3 + 4i)z + 5\bar{z}).$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{z' - z}{z_A} &= \frac{1}{6(1 + 2i)}((-3 + 4i)z + 5\bar{z}) = \frac{1 - 2i}{6(1^2 + 2^2)}((-3 + 4i)z + 5\bar{z}) = \frac{1}{30}((1 - 2i)(-3 + 4i)z + 5(1 - 2i)\bar{z}) \\ &= \frac{1}{30}((5 + 10i)z + 5(1 - 2i)\bar{z}) = \frac{1}{6}((1 + 2i)z + (1 - 2i)\bar{z}) = \frac{1}{6}z + \frac{1}{6}\bar{z} + \frac{1}{3}iz - \frac{1}{3}i\bar{z} \\ &= \frac{z + \bar{z}}{6} + i\frac{z - \bar{z}}{3}. \end{aligned}$$

Pour tout nombre complexe  $z$ ,  $\frac{z' - z}{z_A} = \frac{z + \bar{z}}{6} + i\frac{z - \bar{z}}{3}$ .

Maintenant, si on pose  $z = x + iy$  où  $x$  et  $y$  sont deux réels, on obtient

$$\frac{z' - z}{z_A} = \frac{x + iy + x - iy}{6} + i\frac{x + iy - x + iy}{3} = \frac{x - 2y}{3} \in \mathbb{R}.$$

Pour tout nombre complexe  $z$ ,  $\frac{z' - z}{z_A}$  est un réel.

b) Soit  $M$  un point du plan tel que  $M' \neq M$ . Puisque  $\frac{z' - z}{z_A}$  est un réel, on a

$$\left( \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MM'} \right) = \arg \left( \frac{z' - z}{z_A - 0} \right) = 0 \text{ à } k\pi \text{ près où } k \text{ est un entier relatif.}$$

Ceci montre que les vecteurs  $\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{MM'}$  sont colinéaires ou encore que les droites  $(OA)$  et  $(MM')$  sont parallèles.

Pour tout point  $M$  du plan tel que  $M' \neq M$ , les droites  $(OA)$  et  $(MM')$  sont parallèles.

6°) Soit  $N$  un point du plan.

- Si  $N$  appartient à la droite  $(D)$ , la question 3°) montre que  $N' = N$ .
- Si  $N$  n'appartient pas à la droite  $(D)$ , la question 3°) montre que  $N' \neq N$  et la question 5°) permet d'affirmer que  $N'$  appartient à la parallèle à  $(OA)$  passant par  $N$ . D'autre part, la question 4°) montre que  $N'$  appartient à la droite  $(D)$ .

Enfin, les droites  $(OA)$  et  $(D)$  n'ont pas le même coefficient directeur ( $\frac{1}{2} \neq 2$ ) et ne sont donc pas parallèles. Les droites  $(NN')$  et  $(D)$  sont donc sécantes en  $N'$ .

- Si  $N \in (D)$ ,  $N' = N$  ;
- Si  $N' \notin (D)$ ,  $N'$  est le point d'intersection de la parallèle à  $(OA)$  passant par  $N$  et de la droite  $(D)$ .