BACCALAUREAT GENERAL

Session 2005

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Nouvelle Calédonie

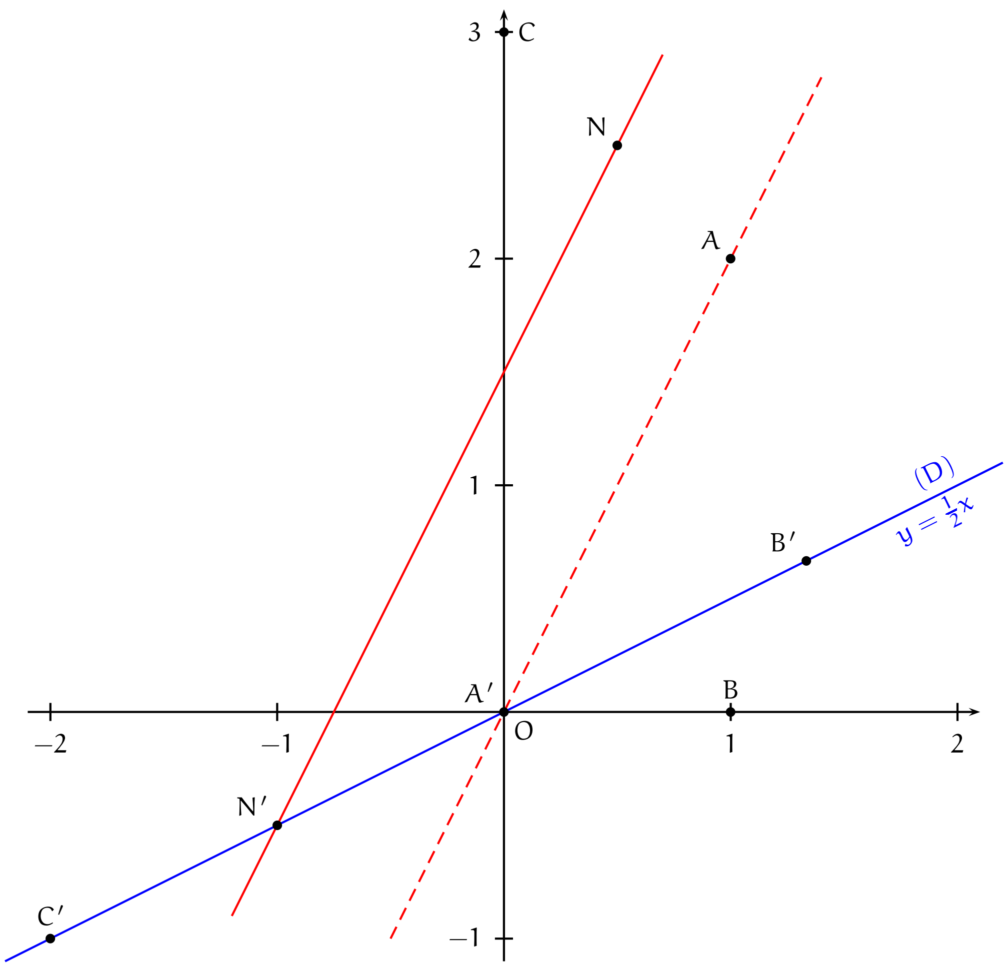
EXERCICE 1
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1°) Si $z = z_A = 1 + 2i$, $z' = \dfrac{1}{6}\left((3+4i)(1+2i) + 5(1-2i)\right) = 0$.

Si $z = z_B = 1$, $z' = \dfrac{1}{6}\left((3+4i)\times 1 + 5\times 1\right) = \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3}i$.

Si $z = z_C = 3i$, $z' = \dfrac{1}{6}\left((3+4i)\times 3i + 5\times(-3i)\right) = -2 - i$.

$$\boxed{A'(0,0),\ B'\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ et } C'(-2,-1).}$$



2°) Posons encore $z' = x' + iy'$ où x' et y' sont deux réels. On a

$$z' = \frac{1}{6}((3+4i)(x+iy) + 5(x-iy)) = \frac{1}{6}((8x-4y) + i(4x-2y)) = \frac{1}{3}((4x-2y) + i(2x-y)).$$

$$\boxed{x' = \frac{1}{3}(4x-2y) \text{ et } y' = \frac{1}{3}(2x-y).}$$

3°) Soit M un point du plan. On note z son affixe puis x et y les parties réelles et imaginaires de z de sorte que $M(x,y)$. D'après la question précédente,

$$f(M) = M \Leftrightarrow \frac{1}{3}(4x-2y) = x \text{ et } \frac{1}{3}(2x-y) = y \Leftrightarrow 4x-2y = 3x \text{ et } 2x-y = 3y \Leftrightarrow x = 2y \text{ et } 2x = 4y \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x.$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des points invariants par } f \text{ est la droite d'équation } y = \frac{1}{2}x.}$$

On remarque que les images respectives A', B' et C' des points A, B et C sont sur (D) et sont donc des points invariants par f.

4°) On a vu à la question 2°) que si M a pour coordonnées (x,y) alors $M'\left(\frac{1}{3}(4x-2y), \frac{1}{3}(2x-y)\right)$. Mais alors, $\frac{1}{2}x_{M'} = \frac{1}{3}(2x-y) = y_{M'}$. On en déduit que $M' \in (D)$.

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ du plan, } M' = f(M) \text{ est invariant par } f.}$$

5°) **a)** Soit z un nombre complexe.

$$z' - z = \frac{1}{6}((3+4i)z + 5\overline{z}) - z = \frac{1}{6}((3+4i)z + 5\overline{z} - 6z) = \frac{1}{6}((-3+4i)z + 5\overline{z}).$$

puis

$$\begin{aligned}
\frac{z'-z}{z_A} &= \frac{1}{6(1+2i)}((-3+4i)z+5\overline{z}) = \frac{1-2i}{6(1^2+2^2)}((-3+4i)z+5\overline{z}) = \frac{1}{30}((1-2i)(-3+4i)z+5(1-2i)\overline{z}) \\
&= \frac{1}{30}((5+10i)z+5(1-2i)\overline{z}) = \frac{1}{6}((1+2i)z+(1-2i)\overline{z}) = \frac{1}{6}z+\frac{1}{6}\overline{z}+\frac{1}{3}iz-\frac{1}{3}i\overline{z} \\
&= \frac{z+\overline{z}}{6} + i\frac{z-\overline{z}}{3}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } z, \ \frac{z'-z}{z_A} = \frac{z+\overline{z}}{6} + i\frac{z-\overline{z}}{3}.}$$

Maintenant, si on pose $z = x + iy$ où x et y sont deux réels, on obtient

$$\frac{z'-z}{z_A} = \frac{x+iy+x-iy}{6} + i\frac{x+iy-x+iy}{3} = \frac{x-2y}{3} \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } z, \ \frac{z'-z}{z_A} \text{ est un réel.}}$$

b) Soit M un point du plan tel que $M' \neq M$. Puisque $\frac{z'-z}{z_A}$ est un réel, on a

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MM'}\right) = \arg\left(\frac{z'-z}{z_A-0}\right) = 0 \text{ à } k\pi \text{ près où } k \text{ est un entier relatif.}$$

Ceci montre que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont colinéaires ou encore que les droites (OA) et (MM') sont parallèles.

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ du plan tel que } M' \neq M, \text{ les droites } (OA) \text{ et } (MM') \text{ sont parallèles.}}$$

6°) Soit N un point du plan.

• Si N appartient à la droite (D), la question 3°) montre que $\mathsf{N}' = \mathsf{N}$.

• Si N n'appartient pas à la droite (D), la question 3°) montre que $\mathsf{N}' \neq \mathsf{N}$ et la question 5°) permet d'affirmer que N' appartient à la parallèle à (OA) passant par N. D'autre part, la question 4°) montre que N' appartient à la droite (D).

Enfin, les droites (OA) et (D) n'ont pas le même coefficient directeur ($\frac{1}{2} \neq 2$) et ne sont donc pas parallèles. Les droites (NN') et (D) sont donc sécantes en N'.

• Si $\mathsf{N} \in (\mathsf{D})$, $\mathsf{N}' = \mathsf{N}$;
• Si $\mathsf{N}' \notin (\mathsf{D})$, N' est le point d'intersection de la parallèle à (OA) passant par N et de la droite (D).

