

EXERCICE 1 (5 points)

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté au repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) . Unité graphique : **3 cm**

A tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' par l'application f qui admet pour écriture complexe :

$$z' = \frac{(3 + 4i)z + 5\bar{z}}{6}.$$

1) On considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i, z_B = 1$ et $z_C = 3i$.
Déterminer les affixes des points A', B', C' images respectives de A, B, C par f .
Placer les points A, B, C, A', B', C' .

2) On pose $z = x + iy$ (avec x et y réels).

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y .

3) Montrer que l'ensemble des points M invariants par f est la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$.
Tracer (D) . Quelle remarque peut-on faire ?

4) Soit M un point quelconque du plan et M' son image par f . Montrer que M' appartient à la droite (D) .

5) a) Montrer que pour tout nombre complexe z : $\frac{z' - z}{z_A} = \frac{z + \bar{z}}{6} + i\frac{z - \bar{z}}{3}$.

En déduire que le nombre $\frac{z' - z}{z_A}$ est réel.

b) En déduire que, si $M' \neq M$, les droites (OA) et (MM') sont parallèles.

6) Un point quelconque N étant donné, comment construire son image N' ?
(on étudiera deux cas suivant que N appartient ou non à (D)).
Effectuer la construction sur la figure.