

EXERCICE 4 (5 points)

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) . Unité graphique : 2cm.

1) On rappelle que pour tous nombres complexes a et b ,

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation $z^3 = 8$.

2) On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c définies par :

$$a = 2, b = -1 + i\sqrt{3} \text{ et } c = -1 - i\sqrt{3}.$$

On appelle r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r' la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On pose $B' = r(B)$ et $C' = r(C)$ et on note b' et c' les affixes des points B' et C' .

a) Placer les points A, B et C dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Dans la suite de l'exercice, on complètera cette figure.

b) Montrer que $b' = 2 + \sqrt{3} + 3i$.

c) Montrer que b' et c' sont des nombres conjugués.

3) On appelle M, N, P et Q les milieux respectifs des segments $[CB], [BB'], [B'C']$ et $[C'C]$. On note m, n, p et q leurs affixes.

a) Montrer que l'affixe du point N est égale à $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 + i\sqrt{3})$. En déduire que les points O, N et C sont alignés.

b) Montrer que $n + 1 = i(q + 1)$. Que peut-on en déduire pour le triangle MNQ ?

c) Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un carré.

EXERCICE 4

1. On note \mathcal{S} l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = 8$.
Soit z un nombre complexe.

$$z^3 - 8 = z^3 - 2^3 = (z - 2)(z^2 + 2z + 2^2) = (z - 2)(z^2 + 2z + 4).$$

Par suite,

$$z^3 = 8 \Leftrightarrow (z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0 \Leftrightarrow z - 2 = 0 \text{ ou } z^2 + 2z + 4 = 0.$$

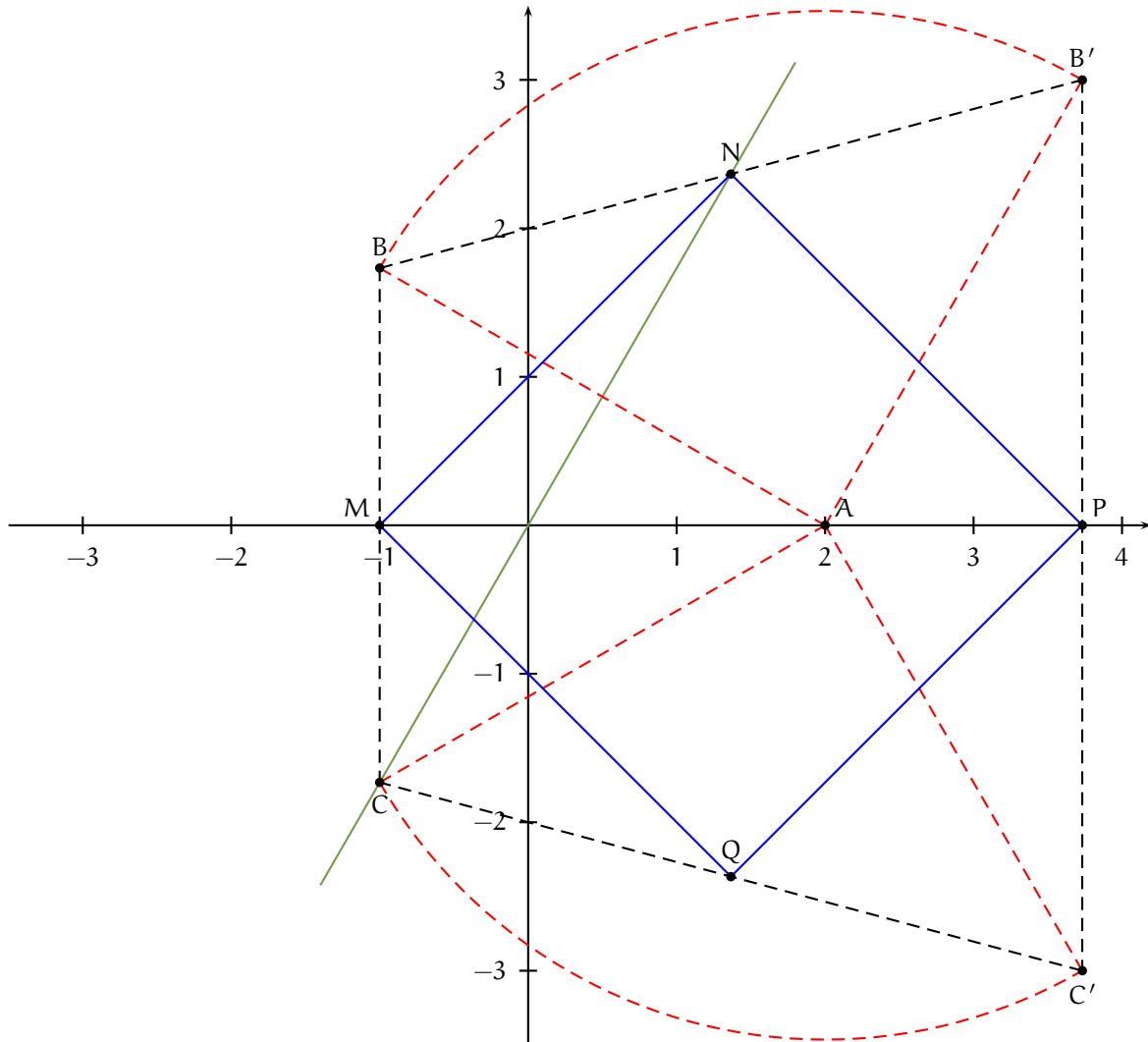
Calculons le discriminant de l'équation $z^2 + 2z + 4 = 0$ (*).

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 4 = -12 = (i\sqrt{12})^2 = (2i\sqrt{3})^2.$$

On en déduit que l'équation (*) admet deux solutions non réelles conjuguées : $z_1 = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = \overline{z_1} = -1 - i\sqrt{3}$.

$$\mathcal{S} = \{2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\}.$$

2. a.



b. Soient Ω un point dont l'affixe est notée ω et θ un réel. L'expression complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est

$$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega.$$

Donc

$$b' = e^{-i\pi/2}(b - a) + a = -i((-1 + i\sqrt{3}) - 2) + 2 = -i(-3 + i\sqrt{3}) + 2 = 2 + \sqrt{3} + 3i.$$

$$b' = 2 + \sqrt{3} + 3i.$$

c. On note que $\bar{a} = a$ et que $\bar{b} = c$. Par suite,

$$c' = e^{i\pi/2}(c - a) + a = i(c - a) + a = \overline{-i(b - a) + a} = \bar{b}'.$$

$$c' = \bar{b}' = 2 + \sqrt{3} - 3i.$$

3. a.

$$n = \frac{1}{2}(b + b') = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 3i) = \frac{1}{2}((1 + \sqrt{3}) + i\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 + i\sqrt{3}).$$

$$n = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 + i\sqrt{3}).$$

On remarque alors que $n = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2}c$ ce qui s'écrit encore $\overrightarrow{ON} = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OC}$. Ainsi, les vecteurs \overrightarrow{ON} et \overrightarrow{OC} sont colinéaires et donc

les points O, N et C sont alignés.

b. D'après la question 2.c., on a $c' = \bar{b}'$ et donc

$$q = \frac{1}{2}(c + c') = \frac{1}{2}(\bar{b} + \bar{b}') = \frac{1}{2}\overline{(b + b')} = \bar{n}.$$

Mais alors

$$i(q + 1) = i(\bar{n} + 1) = i\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 - i\sqrt{3}) + 1\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}(i + \sqrt{3}) + i = \frac{(3 + \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3})i}{2}.$$

et d'autre part

$$n + 1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 + i\sqrt{3}) + 1 = \frac{(3 + \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3})i}{2}.$$

Finalement,

$$n + 1 = i(q + 1).$$

Comme $m = -1$, l'égalité précédente s'écrit encore $q - m = e^{i\pi/2}(n - m)$ et signifie que Q est l'image de N par la rotation de centre M et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On en déduit que le triangle MNQ est rectangle isocèle en M.

Le triangle MNQ est rectangle isocèle en M.

c. M et N sont les milieux respectifs des côtés [CB] et [BB'] du triangle CBB'. Donc la droite (MN) est parallèle à la droite (CB'). De même, la droite (PQ) est parallèle à la droite (CB'). On en déduit alors que les droites (MN) et (PQ) sont parallèles.

De même, les droites (MQ) et (PN) sont parallèles. Finalement, le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.

D'après la question précédente, on a de plus $MN = MQ$ et $(MN) \perp (MQ)$. Finalement, le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme ayant un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueur. On en déduit que

le quadrilatère MNPQ est un carré.