EXERCICE 4

1. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = 8$.
Soit z un nombre complexe.

$$z^3 - 8 = z^3 - 2^3 = (z-2)(z^2 + 2z + 2^2) = (z-2)(z^2 + 2z + 4).$$

Par suite,

$$z^3 = 8 \Leftrightarrow (z-2)(z^2 + 2z + 4) = 0 \Leftrightarrow z - 2 = 0 \text{ ou } z^2 + 2z + 4 = 0.$$

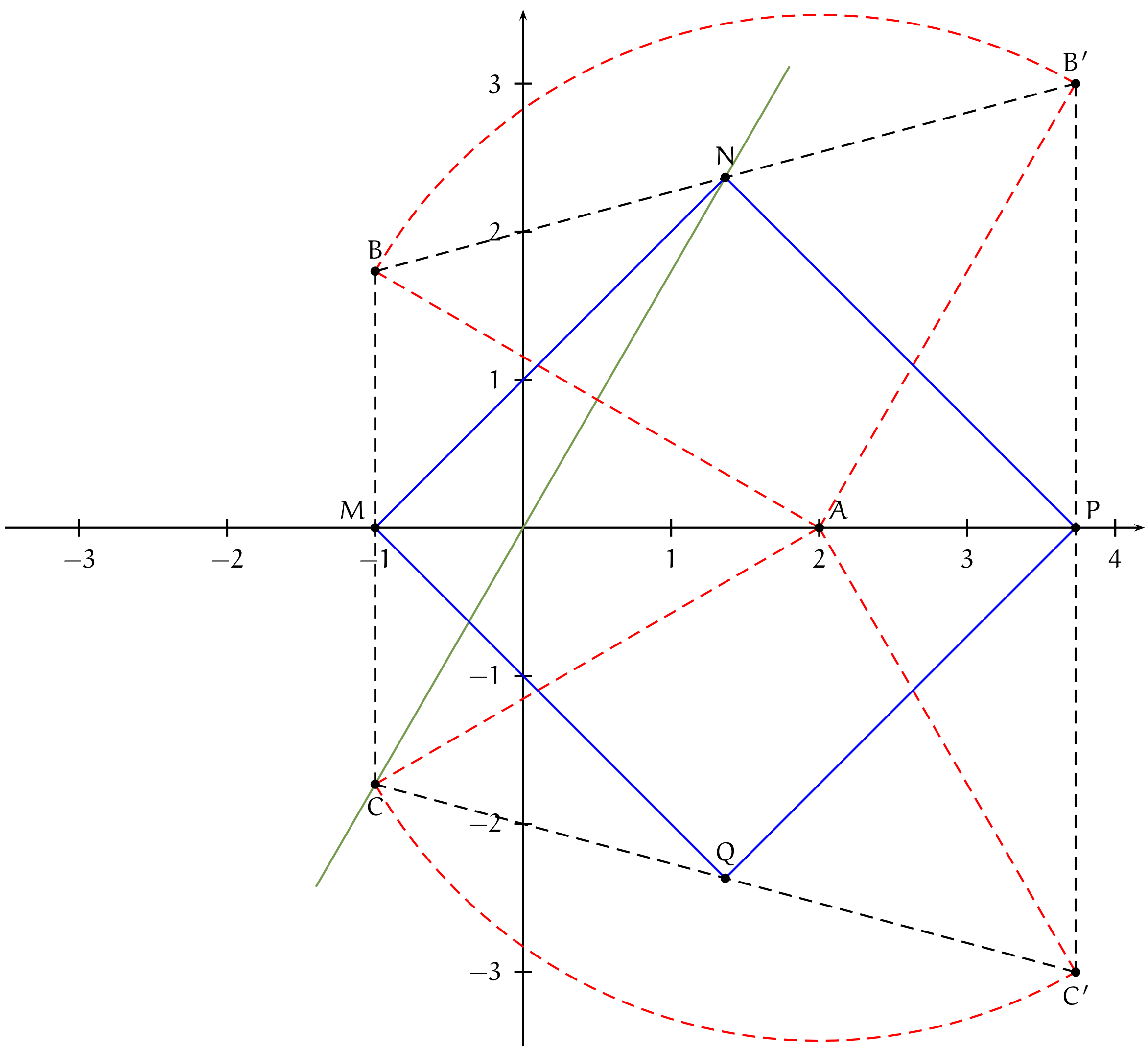
Calculons le discriminant de l'équation $z^2 + 2z + 4 = 0$ $(*)$.

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 4 = -12 = (i\sqrt{12})^2 = (2i\sqrt{3})^2.$$

On en déduit que l'équation $(*)$ admet deux solutions non réelles conjuguées : $z_1 = \dfrac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = \overline{z_1} = -1 - i\sqrt{3}$.

$$\boxed{\mathscr{S} = \{2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\}.}$$

2. a.



b. Soient Ω un point dont l'affixe est notée ω et θ un réel. L'expression complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est

$$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega.$$

Donc

$$b' = e^{-i\pi/2}(b-a)+a = -i((-1+i\sqrt{3})-2)+2 = -i(-3+i\sqrt{3})+2 = 2+\sqrt{3}+3i.$$

$$\boxed{b' = 2+\sqrt{3}+3i.}$$

c. On note que $\overline{a} = a$ et que $\overline{b} = c$. Par suite,

$$c' = e^{i\pi/2}(c-a)+a = i(c-a)+a = \overline{(-i(b-a)+a)} = \overline{b'}.$$

$$\boxed{c' = \overline{b'} = 2+\sqrt{3}-3i.}$$

3. a.

$$n = \frac{1}{2}(b+b') = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+3i) = \frac{1}{2}\Big((1+\sqrt{3})+i\sqrt{3}(1+\sqrt{3})\Big) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i\sqrt{3}).$$

$$\boxed{n = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i\sqrt{3}).}$$

On remarque alors que $n = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}c$ ce qui s'écrit encore $\overrightarrow{ON} = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OC}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont colinéaires et donc

$$\boxed{\text{les points } O, N \text{ et } C \text{ sont alignés.}}$$

b. D'après la question 2.c., on a $c' = \overline{b'}$ et donc

$$q = \frac{1}{2}(c+c') = \frac{1}{2}(\overline{b}+\overline{b'}) = \overline{\frac{1}{2}(b+b')} = \overline{n}.$$

Mais alors

$$i(q+1) = i(\overline{n}+1) = i\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1-i\sqrt{3})+1\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(i+\sqrt{3})+i = \frac{(3+\sqrt{3})+(3+\sqrt{3})i}{2}.$$

et d'autre part

$$n+1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i\sqrt{3})+1 = \frac{(3+\sqrt{3})+(3+\sqrt{3})i}{2}.$$

Finalement,

$$\boxed{n+1 = i(q+1).}$$

Comme $m = -1$, l'égalité précédente s'écrit encore $q-m = e^{i\pi/2}(n-m)$ et signifie que Q est l'image de N par la rotation de centre M et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. On en déduit que le triangle MNQ est rectangle isocèle en M.

$$\boxed{\text{Le triangle } MNQ \text{ est rectangle isocèle en } M.}$$

c. M et N sont les milieux respectifs des côtés [CB] et [BB′] du triangle CBB′. Donc la droite (MN) est parallèle à la droite (CB'). De même, la droite (PQ) est parallèle à la droite (CB'). On en déduit alors que les droites (MN) et (PQ) sont parallèles.
De même, les droites (MQ) et (PN) sont parallèles. Finalement, le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.

D'après la question précédente, on a de plus $MN = MQ$ et $(MN)\perp(MQ)$. Finalement, le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme ayant un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueur. On en déduit que

$$\boxed{\text{le quadrilatère } MNPQ \text{ est un carré.}}$$

