EXERCICE 4 (5 points)

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Unité graphique : 2cm.

1) On rappelle que pour tous nombres complexes a et b,

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^3 = 8$.

2) On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c définies par :

$$a = 2,\ b = -1 + i\sqrt{3} \text{ et } c = -1 - i\sqrt{3}.$$

On appelle r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r' la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
On pose $B' = r(B)$ et $C' = r(C)$ et on note b' et c' les affixes des points B' et C'.

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Dans la suite de l'exercice, on complètera cette figure.

b) Montrer que $b' = 2 + \sqrt{3} + 3i$.

c) Montrer que b' et c' sont des nombres conjugués.

3) On appelle M, N, P et Q les milieux respectifs des segments $[CB]$, $[BB']$, $[B'C']$ et $[C'C]$. On note m, n, p et q leurs affixes.

a) Montrer que l'affixe du point N est égale à $\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1 + i\sqrt{3})$. En déduire que les points O, N et C sont alignés.

b) Montrer que $n + 1 = i(q + 1)$. Que peut-on en déduire pour le triangle MNQ ?

c) Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un carré.