Exercice 2 *(5 points)*

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par I le point d'affixe $z_{\mathrm{I}}=1$, par A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}}=1-2\mathrm{i}$, par B le point d'affixe $z_{\mathrm{B}}=-2+2\mathrm{i}$ et par $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre $[\mathrm{AB}]$.

On fera une figure que l'on complètera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2cm.

1. Déterminer le centre Ω du cercle $(\mathcal{C})$ et calculer son rayon.

2. Soit D le point d'affixe $z_{\mathrm{D}}=\dfrac{3+9\mathrm{i}}{4+2\mathrm{i}}$.
   Écrire z_{D} sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle $(\mathcal{C})$.

3. Sur le cercle $(\mathcal{C})$, on considère le point E, d'affixe z_{E}, tel qu'une mesure en radians de $\left(\overrightarrow{\Omega \mathrm{I}},\overrightarrow{\Omega \mathrm{E}}\right)$ est $\dfrac{\pi}{4}$.

   a. Préciser le module et un argument de $z_{\mathrm{E}}+\dfrac{1}{2}$.

   b. En déduire que $z_{\mathrm{E}}=\dfrac{5\sqrt{2}-2}{4}+\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\mathrm{i}$.

4. Soit r l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point $\mathrm{M'}$ d'affixe z' tel que :

$$z'+\frac{1}{2}=e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(z+\frac{1}{2}\right).$$

   a. Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.

   b. Soit K le point d'affixe $z_{\mathrm{K}}=2$.
   Déterminer par le calcul l'image de K par r. Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat ?

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 2

Voir figure à la fin de l'exercice.

1. Ω est le milieu du segment $[AB]$ et donc

$$z_\Omega = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1}{2}(1 - 2i - 2 + 2i) = -\frac{1}{2}.$$

D'autre part, en notant R le rayon du cercle (C),

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}|z_B - z_A| = \frac{1}{2}|(-2+2i) - (1-2i)| = \frac{1}{2}|-3+4i| = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \frac{\sqrt{25}}{2} = \frac{5}{2}.$$

$$\boxed{(C) \text{ est le cercle de centre } \Omega(-\frac{1}{2}, 0) \text{ et de rayon } \frac{5}{2}.}$$

2.

$$z_D = \frac{3+9i}{4+2i} = \frac{3}{2} \times \frac{1+3i}{2+i} = \frac{3}{2} \times \frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{3}{2} \times \frac{5+5i}{2^2+1^2} = \frac{3}{2}(1+i).$$

$$\boxed{z_D = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i \text{ ou encore } D\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).}$$

Ensuite,

$$\Omega D = |z_D - z_\Omega| = \left|(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i) - (-\frac{1}{2})\right| = \left|2 + \frac{3}{2}i\right| = \frac{1}{2}|4+3i| = \frac{\sqrt{25}}{2} = \frac{5}{2} = R.$$

$$\boxed{D \text{ appartient au cercle } (C).}$$

3. a. On sait que $z_E - z_\Omega = Re^{i\pi/4}$ ou encore $z + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}e^{i\pi/4}$ ou enfin $z + \frac{1}{2}$ est le nombre complexe de module $\frac{5}{2}$ et d'argument $\frac{\pi}{4}$.

b.

$$z_E = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i.$$

$$\boxed{z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i.}$$

4. a. On sait que si f est la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ, l'expression complexe de f est

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

Donc

$$\boxed{r \text{ est la rotation de centre } \Omega\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \text{ et d'angle } \frac{\pi}{4}.}$$

b. Si $z = z_K = 2$, d'après le calcul fait à la question 3.b.,

$$z' = -\frac{1}{2} + e^{i\pi/4}(z_K + \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}e^{i\pi/4} = -\frac{1}{2} + Re^{i\pi/4} = z_E.$$

Géométriquement, puisque $z_K = 2 = -\dfrac{1}{2} + R$, E est l'image du point K par la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et donc $E = r(K)$.

$\boxed{r(K) = E.}$