

EXERCICE 2

Voir figure à la fin de l'exercice.

1. Ω est le milieu du segment $[AB]$ et donc

$$z_{\Omega} = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1}{2}(1 - 2i - 2 + 2i) = -\frac{1}{2}.$$

D'autre part, en notant R le rayon du cercle (C) ,

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}|z_B - z_A| = \frac{1}{2}|(-2 + 2i) - (1 - 2i)| = \frac{1}{2}|-3 + 4i| = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \frac{\sqrt{25}}{2} = \frac{5}{2}.$$

(C) est le cercle de centre $\Omega(-\frac{1}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{5}{2}$.

2.

$$z_D = \frac{3 + 9i}{4 + 2i} = \frac{3}{2} \times \frac{1 + 3i}{2 + i} = \frac{3}{2} \times \frac{(1 + 3i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{3}{2} \times \frac{5 + 5i}{2^2 + 1^2} = \frac{3}{2}(1 + i).$$

$$z_D = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i \text{ ou encore } D\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Ensuite,

$$\Omega D = |z_D - z_{\Omega}| = \left| \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| = \left| 2 + \frac{3}{2}i \right| = \frac{1}{2}|4 + 3i| = \frac{\sqrt{25}}{2} = \frac{5}{2} = R.$$

D appartient au cercle (C) .

3. a. On sait que $z_E - z_{\Omega} = Re^{i\pi/4}$ ou encore $z + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}e^{i\pi/4}$ ou enfin $z + \frac{1}{2}$ est le nombre complexe de module $\frac{5}{2}$ et d'argument $\frac{\pi}{4}$.

b.

$$z_E = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i = \frac{5\sqrt{2} - 2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i.$$

$$z_E = \frac{5\sqrt{2} - 2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i.$$

4. a. On sait que si f est la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ , l'expression complexe de f est

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

Donc

r est la rotation de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

b. Si $z = z_K = 2$, d'après le calcul fait à la question 3.b.,

$$z' = -\frac{1}{2} + e^{i\pi/4}\left(z_K + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}e^{i\pi/4} = -\frac{1}{2} + Re^{i\pi/4} = z_E.$$

Géométriquement, puisque $z_K = 2 = -\frac{1}{2} + R$, E est l'image du point K par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et donc $E = r(K)$.

