

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère le plan complexe P rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Dans tout l'exercice, $P \setminus \{O\}$ désigne le plan privé du point origine O .

1) Question de cours

On prend comme pré-requis les résultats suivants :

- Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

- Pour tout vecteur \vec{w} non nul d'affixe z on a : $\arg(z) = (\vec{u}; \vec{w})$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

a) Soit z et z' des nombres complexes non nuls, démontrer que $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif

b) Démontrer que si A, B et C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c , on a : $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = (\vec{AB}, \vec{AC})$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

2) On considère l'application f de $P \setminus \{O\}$ dans $P \setminus \{O\}$ qui, au point M du plan d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{1}{\bar{z}}$. On appelle U et V les points du plan d'affixes respectives 1 et i .

a) Démontrer que pour $z \neq 0$, on a $\arg(z') = \arg(z)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

En déduire que, pour tout point M de $P \setminus \{O\}$ les points M et $M' = f(M)$ appartiennent à une même demi-droite d'origine O .

b) Déterminer l'ensemble des points M de $P \setminus \{O\}$ tels que $f(M) = M$.

c) M est un point du plan distinct de O, U et V , on admet que M' est aussi distinct de O, U et V .

Etablir l'égalité $\frac{z'-1}{z'-i} = \frac{1}{i} \left(\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+i} \right) = -i \overline{\left(\frac{z-1}{z-i} \right)}$.

En déduire une relation entre $\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right)$ et $\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)$.

3) a) Soit z un nombre complexe tel que $z \neq 1$ et $z \neq i$ et soit M le point d'affixe z . Démontrer que M est sur la droite (UV) privée de U et de V si et seulement si $\frac{z-1}{z-i}$ est un nombre réel non nul.

b) Déterminer l'image par f de la droite (UV) privée de U et de V .

EXERCICE 3

1) Question de cours

a) Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

$$\arg(z) = \arg\left(\frac{z}{z'} \cdot z'\right) = \arg\left(\frac{z}{z'}\right) + \arg(z') \text{ à } 2k\pi \text{ près, avec } k \text{ entier relatif,}$$

et donc

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \text{ à } 2k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif.}$$

b) Soient A , B et C trois points du plan deux à deux distincts, d'affixes respectives a , b et c .

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) &= \arg(c-a) - \arg(b-a) \\ &= \arg(\overrightarrow{z_{AC}}) - \arg(\overrightarrow{z_{AB}}) \\ &= (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AB}) \\ &= (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \text{ à } 2k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif (d'après la relation de CHASLES).} \end{aligned}$$

2)

a) Soit z un nombre complexe non nul.

$$z' = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{z \cdot \bar{z}} = \frac{1}{|z|^2} z.$$

Comme $\frac{1}{|z|^2}$ est un réel strictement positif, on a $\arg\left(\frac{1}{|z|^2}\right) = 0$ à $2k\pi$ près avec k entier relatif et donc

$$\arg(z') = \arg\left(\frac{1}{|z|^2}\right) + \arg(z) = \arg(z) \text{ à } 2k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif.}$$

Soit alors M un point du plan distinct de l'origine O .

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) = 0 \text{ à } 2k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif.}$$

On en déduit que

M' appartient à la demi-droite $[OM)$.

b) Soit M un point du plan distinct de l'origine O .

$$f(M) = M \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow z = \frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow OM = 1.$$

Donc

L'ensemble des points M de $P \setminus \{O\}$ tels que $f(M) = M$ est le cercle de centre O et de rayon 1.

c) Soit M un point du plan distinct de O , U et V .

$$\begin{aligned} \frac{z'-1}{z'-i} &= \frac{\frac{1}{\bar{z}} - 1}{\frac{1}{\bar{z}} - i} = \frac{\frac{1-\bar{z}}{\bar{z}}}{\frac{1-i\bar{z}}{\bar{z}}} = \frac{1-\bar{z}}{1-i\bar{z}} = \frac{\bar{z}-1}{i\bar{z}-1} = \frac{1-\bar{z}}{i\bar{z}+i} \\ &= \frac{-i}{i \cdot (-i)} \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}-i} = -i \overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\text{pour tout complexe non nul } z, \frac{z' - 1}{z' - i} = \frac{1 \bar{z} - 1}{i \bar{z} + i} = -i \overline{\left(\frac{z - 1}{z - i} \right)}.$$

Puisque $\frac{z' - 1}{z' - i} \neq 0$, on peut passer aux arguments et on obtient

$$\arg \left(\frac{z' - 1}{z' - i} \right) = \arg \left(-i \overline{\left(\frac{z - 1}{z - i} \right)} \right) = \arg(-i) + \arg \left(\overline{\left(\frac{z - 1}{z - i} \right)} \right) = -\frac{\pi}{2} - \arg \left(\frac{z - 1}{z - i} \right) \text{ à } 2k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif.}$$

- 3)
a) Soit z un nombre complexe différent de 1 et de i . D'après le résultat de cours redémontré en 1)b),

$$\begin{aligned} M \in (UV) &\Leftrightarrow (\overrightarrow{VM}, \overrightarrow{UM}) = 0 \text{ à } k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif} \\ &\Leftrightarrow \arg \left(\frac{z - 1}{z - i} \right) = 0 \text{ à } k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif} \\ &\Leftrightarrow \frac{z - 1}{z - i} \text{ est un réel non nul.} \end{aligned}$$

- b) Soit z un nombre complexe différent de 0, 1 et i . D'après le résultat de la fin de la question 2)c),

$$\begin{aligned} M \in (UV) \setminus \{U, V\} &\Leftrightarrow \frac{z - 1}{z - i} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg \left(\frac{z - 1}{z - i} \right) = 0 \text{ à } k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif} \\ &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} - \arg \left(\frac{z' - 1}{z' - i} \right) = 0 \text{ à } k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif} \\ &\Leftrightarrow \arg \left(\frac{z' - 1}{z' - i} \right) = -\frac{\pi}{2} \text{ à } k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif} \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{VM'}, \overrightarrow{UM'}) = -\frac{\pi}{2} \text{ à } k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif} \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{UM'}, \overrightarrow{VM'}) = \frac{\pi}{2} \text{ à } k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif} \\ &\Leftrightarrow M' \text{ appartient au cercle de diamètre } [UV] \text{ privé de } U \text{ et } V. \end{aligned}$$

L'image par f de la droite (UV) privée de U et V est le cercle de diamètre $[UV]$ privé de U et V .