EXERCICE 3

1) Question de cours

a) Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

$$\arg(z) = \arg\left(\frac{z}{z'}.z'\right) = \arg\left(\frac{z}{z'}\right) + \arg(z') \text{ à } 2k\pi \text{ près, avec } k \text{ entier relatif,}$$

et donc

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \text{ à } 2k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif.}$$

b) Soient A, B et C trois points du plan deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c.

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) &= \arg(c-a) - \arg(b-a)\\ &= \arg\left(z_{\overrightarrow{AC}}\right) - \arg\left(z_{\overrightarrow{AB}}\right)\\ &= (\overrightarrow{u};\overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB})\\ &= (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \text{ à } 2k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif (d'après la relation de } \text{Chasles).}\end{aligned}$$

2)

a) Soit z un nombre complexe non nul.

$$z' = \frac{1}{\overline{z}} = \frac{z}{z.\overline{z}} = \frac{1}{|z|^2}z.$$

Comme $\dfrac{1}{|z|^2}$ est un réel strictement positif, on a $\arg\left(\dfrac{1}{|z|^2}\right) = 0$ à $2k\pi$ près avec k entier relatif et donc

$$\arg(z') = \arg\left(\frac{1}{|z|^2}\right) + \arg(z) = \arg(z) \text{ à } 2k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif.}$$

Soit alors M un point du plan distinct de l'origine O.

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) = 0 \text{ à } 2k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif.}$$

On en déduit que

$$\boxed{M' \text{ appartient à la demi-droite } [OM).}$$

b) Soit M un point du plan distinct de l'origine O.

$$f(M) = M \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow z = \frac{1}{\overline{z}} \Leftrightarrow z.\overline{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow OM = 1.$$

Donc

$$\boxed{\text{L'ensemble des points } M \text{ de } P \setminus \{O\} \text{ tels que } f(M) = M \text{ est le cercle de centre } O \text{ et de rayon } 1.}$$

c) Soit M un point du plan distinct de O, U et V.

$$\begin{aligned}\frac{z'-1}{z'-i} &= \frac{\dfrac{1}{\overline{z}} - 1}{\dfrac{1}{\overline{z}} - i} = \frac{\dfrac{1-\overline{z}}{\overline{z}}}{\dfrac{1-i\overline{z}}{\overline{z}}} = \frac{1-\overline{z}}{1-i\overline{z}} = \frac{\overline{z}-1}{i\overline{z}-1} = \frac{1}{i}\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+i}\\ &= \frac{-i}{i.(-i)}\frac{\overline{z-1}}{\overline{z-i}} = -i\,\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{pour tout complexe non nul } z,\ \frac{z'-1}{z'-i} = \frac{1}{i}\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+i} = -i\,\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}.}$$

Puisque $\dfrac{z'-1}{z'-i} \neq 0$, on peut passer aux arguments et on obtient

$$\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right) = \arg\left(-i \times \overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}\right) = \arg(-i) + \arg\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)} = -\frac{\pi}{2} - \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) \text{ à } 2k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif.}$$

3)

a) Soit z un nombre complexe différent de 1 et de i. D'après le résultat de cours redémontré en 1)b),

$$\begin{aligned} M \in (UV) &\Leftrightarrow (\overrightarrow{VM}, \overrightarrow{UM}) = 0 \text{ à } k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif} \\ &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0 \text{ à } k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif} \\ &\Leftrightarrow \frac{z-1}{z-i} \text{ est un réel non nul.} \end{aligned}$$

b) Soit z un nombre complexe différent de 0, 1 et i. D'après le résultat de la fin de la question 2)c),

$$\begin{aligned} M \in (UV) \setminus \{U, V\} &\Leftrightarrow \frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0 \text{ à } k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif} \\ &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} - \arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right) = 0 \text{ à } k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif} \\ &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ à } k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif} \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{VM'}, \overrightarrow{UM'}) = -\frac{\pi}{2} \text{ à } k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif} \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{UM'}, \overrightarrow{VM'}) = \frac{\pi}{2} \text{ à } k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif} \\ &\Leftrightarrow M' \text{ appartient au cercle de diamètre } [UV] \text{ privé de } U \text{ et } V. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'image par } f \text{ de la droite } (UV) \text{ privée de } U \text{ et } V \text{ est le cercle de diamètre } [UV] \text{ privé de } U \text{ et } V.}$$

