EXERCICE 3 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère le plan complexe P rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Dans tout l'exercice, $P \setminus \{O\}$ désigne le plan privé du point origine O.

1) Question de cours

On prend comme pré-requis les résultats suivants :

- Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

- Pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul d'affixe z on a : $\arg(z) = (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{w})$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

a) Soit z et z' des nombres complexes non nuls, démontrer que $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif

b) Démontrer que si A, B et C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c, on a : $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

2) On considère l'application f de $P \setminus \{O\}$ dans $P \setminus \{O\}$ qui, au point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{1}{\overline{z}}$. On appelle U et V les points du plan d'affixes respectives 1 et i.

a) Démontrer que pour $z \neq 0$, on a $\arg(z') = \arg(z)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.
En déduire que, pour tout point M de $P \setminus \{O\}$ les points M et $M' = f(M)$ appartiennent à une même demi-droite d'origine O.

b) Déterminer l'ensemble des points M de $P \setminus \{O\}$ tels que $f(M) = M$.

c) M est un point du plan distinct de O, U et V, on admet que M' est aussi distinct de O, U et V.

Etablir l'égalité $\frac{z'-1}{z'-i} = \frac{1}{i}\left(\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+i}\right) = -i\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}$.

En déduire une relation entre $\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right)$ et $\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)$.

3) a) Soit z un nombre complexe tel que $z \neq 1$ et $z \neq i$ et soit M le point d'affixe z. Démontrer que M est sur la droite (UV) privée de U et de V si et seulement si $\frac{z-1}{z-i}$ est un nombre réel non nul.

b) Déterminer l'image par f de la droite (UV) privée de U et de V.