EXERCICE 2 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On prendra 2 cm pour unité graphique.

Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe 2.

1. a) Déterminer l'affixe du point B_1, image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

b) Déterminer l'affixe du point B' image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
Placer les points A, B et B'.

2. On appelle f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que z'=(1+i)z+1.

a) Montrer que B a pour image B' par f.

b) Montrer que A est le seule point invariant par f.

c) Etablir que pour tout nombre complexe z distinct de i, $\frac{z' - z}{\mathrm{i} - z} = -\mathrm{i}$.
Interpréter ce résultat en termes de distances puis en termes d'angles.
En déduire une méthode de construction du point M' à partir de M, pour M distinct de A.

3. a) Donner la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'ensemble Σ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z - 2| = \sqrt{2}$.

b) Démontrer que z'-3-2i=(1+i)(z-2).
En déduire que si le point M appartient à Σ_1 alors son image par f appartient à un cercle Σ_2 dont on précisera le centre et le rayon.

c) Tracer Σ_1 et Σ_2 sur la même figure que A, B et B'.

EXERCICE 2

1. **a)** L'expression complexe de l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$ est $z' - i = \sqrt{2}(z - i)$. Donc

$$z_{B_1} = \sqrt{2}z_B + i - i\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + i(1 - \sqrt{2}).$$

b) L'expression complexe de la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ est $z' - i = e^{i\pi/4}(z - i)$. Donc

$$\begin{aligned} z_{B'} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z_{B_1} + i - i\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\left[2\sqrt{2} + i(1-\sqrt{2})\right] + \frac{\sqrt{2}}{2} + i(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \\ &= \left[2 - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] + i\left[2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2}) + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 3 + 2i. \end{aligned}$$

$\boxed{B' \text{ est le point d'affixe } 3 + 2i.}$

Voir figure à la fin de l'exercice.

2. **a)** Si $z = 2$, alors $z' = 2(1 + i) + 1 = 3 + 2i$. Le point B a donc bien pour image B'.

b) Soit M un point du plan. On note z son affixe.

$$f(M) = M \Leftrightarrow z = (1+i)z + 1 \Leftrightarrow -iz = 1 \Leftrightarrow i(-i)z = i \Leftrightarrow z = i \Leftrightarrow M = A.$$

Donc f admet un et un seul point invariant, le point A.

c) Soit z un nombre complexe distinct de i.

$$\frac{z' - z}{i - z} = \frac{(1+i)z + 1 - z}{i - z} = \frac{1 + iz}{i - z} = \frac{-i(i - z)}{i - z} = -i.$$

En passant aux modules, on obtient $\dfrac{|z' - z|}{|i - z|} = 1$ ce qui signifie en termes de distances que $MM' = AM$.

$$MM' = MA \quad (1).$$

Puisque $z \neq i$, on a aussi $z' \neq i$ d'après 2. b). On peut donc passer aux arguments et on obtient $\arg\left(\dfrac{z' - z}{i - z}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ (modulo 2π) ce qui signifie en terme d'angles que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM'}) = -\dfrac{\pi}{2}$ (modulo 2π).

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM'}) = -\frac{\pi}{2} \text{ (modulo } 2\pi) \quad (2).$$

Les égalités (1) et (2) fournissent une construction géométrique du point M' à partir des points A et M car elles signifient

$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ distinct de } A,\ M' \text{ est l'image de } A \text{ par la rotation de centre } M \text{ et d'angle } -\frac{\pi}{2}.}$

3. **a)** Soit M un point du plan. On note z son affixe.

$$|z - 2| = \sqrt{2} \Leftrightarrow AM = \sqrt{2}.$$

$\boxed{\Sigma_1 \text{ est le cercle de centre } A \text{ et de rayon } \sqrt{2}.}$

b) Soit z un nombre complexe.

$$z' - 3 - 2i = (1+i)z + 1 - 3 - 2i = (1+i)z - 2(1+i) = (1+i)(z-2).$$

Soit M un point de Σ_1. On note z son affixe. On a $|z - 2| = \sqrt{2}$. Mais alors

$$|z - (3 + 2i)| = |1 + i|.|z - 2| = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2.$$

On en déduit que M' appartient au cercle Σ_2 de centre B' et de rayon 2.

$$\boxed{\Sigma_2 \text{ est le cercle de centre } B' \text{ et de rayon } 2.}$$

c)