EXERCICE 2

1. a) L'expression complexe de l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$ est $z' - i = \sqrt{2}(z - i)$. Donc

$$z_{B_1} = \sqrt{2}z_B + i - i\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + i(1 - \sqrt{2}).$$

b) L'expression complexe de la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$ est $z' - i = e^{i\pi/4}(z - i)$. Donc

$$\begin{aligned} z_{B'} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z_{B_1} + i - i\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\left[2\sqrt{2} + i(1-\sqrt{2})\right] + \frac{\sqrt{2}}{2} + i(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \\ &= \left[2 - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] + i\left[2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2}) + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 3 + 2i. \end{aligned}$$

$$\boxed{B' \text{ est le point d'affixe } 3 + 2i.}$$

Voir figure à la fin de l'exercice.

2. a) Si $z = 2$, alors $z' = 2(1+i) + 1 = 3 + 2i$. Le point B a donc bien pour image B'.

b) Soit M un point du plan. On note z son affixe.

$$f(M) = M \Leftrightarrow z = (1+i)z + 1 \Leftrightarrow -iz = 1 \Leftrightarrow i(-i)z = i \Leftrightarrow z = i \Leftrightarrow M = A.$$

Donc f admet un et un seul point invariant, le point A.

c) Soit z un nombre complexe distinct de i.

$$\frac{z' - z}{i - z} = \frac{(1+i)z + 1 - z}{i - z} = \frac{1 + iz}{i - z} = \frac{-i(i - z)}{i - z} = -i.$$

En passant aux modules, on obtient $\frac{|z' - z|}{|i - z|} = 1$ ce qui signifie en termes de distances que $MM' = AM$.

$$MM' = MA \quad (1).$$

D'autre part $\arg\left(\frac{z' - z}{i - z}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$ (modulo 2π) ce qui signifie en terme d'angles que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM'}) = -\frac{\pi}{2}$ (modulo 2π).

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM'}) = -\frac{\pi}{2} \text{ (modulo } 2\pi) \quad (2).$$

Les égalités (1) et (2) fournissent une construction géométrique du point M' à partir des points A et M car elles signifient

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ distinct de } A,\ M' \text{ est l'image de } A \text{ par la rotation de centre } M \text{ et d'angle } -\frac{\pi}{2}.}$$

3. a) Soit M un point du plan. On note z son affixe.

$$|z - 2| = \sqrt{2} \Leftrightarrow AM = \sqrt{2}.$$

$$\boxed{\Sigma_1 \text{ est le cercle de centre } A \text{ et de rayon } \sqrt{2}.}$$

b) Soit z un nombre complexe.

$$z' - 3 - 2i = (1+i)z + 1 - 3 - 2i = (1+i)z - 2(1+i) = (1+i)(z-2).$$

Soit M un point de Σ_1. On note z son affixe. On a $|z - 2| = \sqrt{2}$. Mais alors

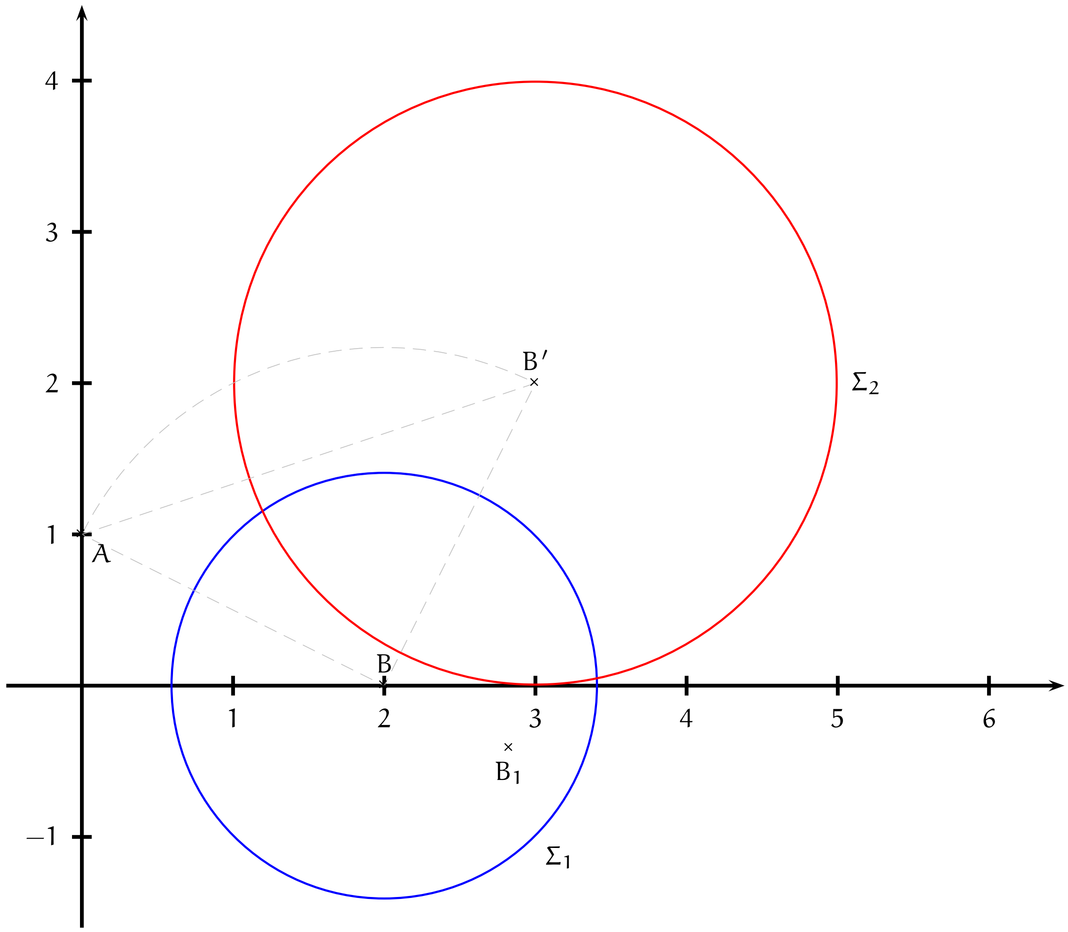
$$|z - (3 + 2i)| = |1 + i|.|z - 2| = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2.$$

 © Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.

On en déduit que M' appartient au cercle Σ_2 de centre B' et de rayon 2.

$\boxed{\Sigma_2 \text{ est le cercle de centre } B' \text{ et de rayon } 2.}$

c)



 © Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.