EXERCICE 2 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On prendra 2 cm pour unité graphique.

Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe 2.

1. a) Déterminer l'affixe du point B_1, image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

b) Déterminer l'affixe du point B' image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
Placer les points A, B et B'.

2. On appelle f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que z'=(1+i)z+1.

a) Montrer que B a pour image B' par f.

b) Montrer que A est le seule point invariant par f.

c) Etablir que pour tout nombre complexe z distinct de i, $\frac{z'-z}{\mathrm{i}-z} = -\mathrm{i}$.
Interpréter ce résultat en termes de distances puis en termes d'angles.
En déduire une méthode de construction du point M' à partir de M, pour M distinct de A.

3. a) Donner la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'ensemble Σ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z-2| = \sqrt{2}$.

b) Démontrer que z'-3-2i=(1+i)(z-2).
En déduire que si le point M appartient à Σ_1 alors son image par f appartient à un cercle Σ_2 dont on précisera le centre et le rayon.

c) Tracer Σ_1 et Σ_2 sur la même figure que A, B et B'.