EXERCICE 1 (5 points)

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$; unité graphique 2cm.

On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$.

On considère l'application f qui, à tout point M différent du point B, d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par $z' = \dfrac{z-1}{z+1}$.

On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.

1. Déterminer les points invariants de f, c'est-à-dire les points M tels que $M = f(M)$.
2. a) Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1, $(z'-1)(z+1) = -2$.

   b) En déduire une relation entre $|z'-1|$ et $|z+1|$, puis entre $\arg(z'-1)$ et $\arg(z+1)$, pour tout nombre complexe z différent de -1.

   Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.
3. Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle (C') de centre A et de rayon 1.
4. Soit le point P d'affixe $p = -2 + i\sqrt{3}$.

   a) Déterminer la forme exponentielle de $(p + 1)$.

   b) Montrer que le point P appartient au cercle (C).

   c) Soit Q le point d'affixe $q = -\overline{p}$ où $\overline{p}$ est le conjugué de p.

   Montrer que les points A, P' et Q sont alignés.

   d) En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P' du point P par l'application f.

BACCALAUREAT GENERAL

Session 2006

MATHEMATIQUES

- Série S -

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

POLYNESIE FRANCAISE

EXERCICE 1

1.

1. Soit M un point du plan différent du point B. On note z son affixe (z est différent de -1).

$$f(M) = M \Leftrightarrow \frac{z-1}{z+1} = z \Leftrightarrow z - 1 = z(z+1) \text{ et } z \neq -1$$
$$\Leftrightarrow z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z = i \text{ ou } z = -i.$$

$\boxed{\text{Les points invariants par } f \text{ sont les points de coordonnées } (0, 1) \text{ et } (0, -1).}$

2.

a) Soit z un nombre complexe différent de -1.

$$(z' - 1)(z+1) = \left(\frac{z-1}{z+1} - 1\right)(z+1) = \frac{-2}{z+1}(z+1) = -2 \ (*).$$

b) En prenant les module des deux membres, on obtient $|z' - 1|.|z+1| = |-2| = 2$.

$\boxed{\text{Pour tout complexe } z \text{ différent de } -1,\ |z' - 1| = \frac{2}{|z+1|}.}$

L'égalité $|z' - 1|.|z+1| = 2$ montre en particulier que $z' - 1 \neq 0$ et donc qu'un argument de $z' - 1$ existe. En passant aux arguments dans la relation $(*)$, on obtient $\arg(z' - 1) + \arg z - 1 = \arg(-2) = \pi\ (2\pi)$.

$\boxed{\text{Pour tout complexe } z \text{ différent de } -1,\ \arg(z' - 1) = -\arg(z+1) + \pi\ (2\pi).}$

Ceci s'interprète géométriquement.

$$AM' = |z' - a| = |z' - 1| = \frac{2}{|z+1|} = \frac{2}{BM},$$

D'autre part,

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM'}) = \arg(z_{\overrightarrow{AM'}}) = \arg(z' - a)$$
$$= \arg(z' - 1) = \pi - \arg(z+1) = \pi - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BM})\ (2\pi).$$

$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ distinct de } B,\ AM' = \frac{2}{BM} \text{ et } (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM'}) = \pi - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BM})\ (2\pi).}$

3. Soit M un point du plan distinct de B.

$$M \in (C) \Leftrightarrow BM = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{BM} = 1 \Leftrightarrow AM' = 1 \Leftrightarrow M' \in (C').$$

4.

a) $p+1 = -1+i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})) = 2e^{2i\pi/3}$.

$$\boxed{p+1 = 2e^{2i\pi/3}.}$$

b) $BP = |p-b| = |p+1| = |2e^{2i\pi/3}| = 2$. Donc

$$\boxed{\text{P appartient au cercle } (C).}$$

c) D'après 2. b), p' est différent de 1 ou encore P' n'est pas le point A. D'autre part, p n'est pas réel. Il en est de même de $-\overline{p}$. En particulier, $-\overline{p}$ est différent de 1 ou encore Q n'est pas le point A. Ensuite,

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AP'}) &= \arg(p'-1) - \arg(-\overline{p}-1) = \arg(p'-1) - \arg(-\overline{p+1})\\ &= \arg(p'-1) - (\pi - \arg(p+1))\\ &= \arg(p'-1) + \arg(p+1) - \pi\\ &= 0\ (2\pi)\ (\text{d'après 2. b}))\end{aligned}$$

On en déduit que les points A, P et Q sont alignés.

d) D'après 4. b) et 3., le point P' est sur (C'). D'autre part, d'après c), $(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AP'}) = 0\ (2\pi)$ ce qui montre que P' est sur la demi-droite $[AQ)$.
Pour construire le point P', on commence donc par construire le symétrique du point P par rapport à l'axe (Oy). On trace ensuite la droite (AQ). Elle coupe le cercle $(C)'$ en deux points. Un et un seul de ces deux points est sur la demi-droite (AQ) : le point P'.