BACCALAUREAT GENERAL

Session 2006

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Polynésie

EXERCICE 1

1.

1. Soit M un point du plan différent du point B. On note z son affixe (z est différent de -1).

$$\begin{aligned} f(M) = M &\Leftrightarrow \frac{z-1}{z+1} = z \Leftrightarrow z - 1 = z(z+1) \text{ et } z \neq -1 \\ &\Leftrightarrow z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z = i \text{ ou } z = -i. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Les points invariants par } f \text{ sont les points de coordonnées } (0,1) \text{ et } (0,-1).}$

2.

a) Soit z un nombre complexe différent de -1.

$$(z'-1)(z+1) = \left(\frac{z-1}{z+1} - 1\right)(z+1) = \frac{-2}{z+1}(z+1) = -2\ (*).$$

b) En prenant les modules des deux membres, on obtient $|z'-1|.|z+1| = |-2| = 2$.

$\boxed{\text{Pour tout complexe } z \text{ différent de } -1,\ |z'-1| = \frac{2}{|z+1|}.}$

L'égalité $|z'-1| \times |z+1| = 2$ montre en particulier que $z' - 1 \neq 0$ et donc qu'un argument de $z' - 1$ existe. En passant aux arguments dans la relation $(*)$, on obtient $\arg(z'-1) + \arg(z+1) = \arg(-2) = \pi\ (2\pi)$.

$\boxed{\text{Pour tout complexe } z \text{ différent de } -1,\ \arg(z'-1) = -\arg(z+1) + \pi\ (2\pi).}$

Ceci s'interprète géométriquement.

$$AM' = |z' - a| = |z' - 1| = \frac{2}{|z+1|} = \frac{2}{BM},$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM'}) &= \arg(z_{\overrightarrow{AM'}}) = \arg(z' - a) \\ &= \arg(z'-1) = \pi - \arg(z+1) = \pi - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BM})\ (2\pi). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ distinct de B, } AM' = \frac{2}{BM} \text{ et } (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM'}) = \pi - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BM})\ (2\pi).}$

3. Soit M un point du plan distinct de B.

$$M \in (C) \Leftrightarrow BM = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{BM} = 1 \Leftrightarrow AM' = 1 \Leftrightarrow M' \in (C').$$

4.

a) $p+1 = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})) = 2e^{2i\pi/3}$.

$$\boxed{p+1 = 2e^{2i\pi/3}.}$$

b) $BP = |p-b| = |p+1| = |2e^{2i\pi/3}| = 2$. Donc

$$\boxed{P \text{ appartient au cercle } (C).}$$

c) D'après 2. b), $(p'-1)(p+1) = -2 \neq 0$ et en particulier p' est différent de 1 ou encore P' n'est pas le point A. D'autre part, p n'est pas réel. Il en est de même de $-\overline{p}$. En particulier, $-\overline{p}$ est différent de 1 ou encore Q n'est pas le point A. Ensuite,

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AP'}) &= \arg(p'-1) - \arg(-\overline{p}-1) = \arg(p'-1) - \arg(-\overline{p+1}) \\ &= \arg(p'-1) - (\pi - \arg(p+1)) \\ &= \arg(p'-1) + \arg(p+1) - \pi \\ &= 0\ (2\pi)\ (\text{d'après 2. b}))\end{aligned}$$

On en déduit que les points A, P et Q sont alignés.

d) D'après 4. b) et 3., le point P' est sur (C'). D'autre part, d'après c), $(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AP'}) = 0\ (2\pi)$ ce qui montre que P' est sur la demi-droite $[AQ)$.
Pour construire le point P', on commence donc par construire le symétrique du point P par rapport à l'axe (Oy). On trace ensuite la droite (AQ). Elle coupe le cercle (C') en deux points. Un et un seul de ces deux points est sur la demi-droite (AQ) : le point P'.