

EXERCICE 1 (5 points)

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$; unité graphique 2cm.

On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$.

On considère l'application f qui, à tout point M différent du point B, d'affixe z , fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{z-1}{z+1}$.

On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.

- Déterminer les points invariants de f , c'est-à-dire les points M tels que $M = f(M)$.
- Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1 , $(z'-1)(z+1) = -2$.
 - En déduire une relation entre $|z'-1|$ et $|z+1|$, puis entre $\arg(z'-1)$ et $\arg(z+1)$, pour tout nombre complexe z différent de -1 .
Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.
- Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle (C') de centre A et de rayon 1.
- Soit le point P d'affixe $p = -2 + i\sqrt{3}$.
 - Déterminer la forme exponentielle de $(p+1)$.
 - Montrer que le point P appartient au cercle (C).
 - Soit Q le point d'affixe $q = -\bar{p}$ où \bar{p} est le conjugué de p .
Montrer que les points A, P' et Q sont alignés.
 - En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P' du point P par l'application f .