Exercice 2 (*5 points*)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 5 cm.

On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n$. On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 et vérifier que z_4 est un nombre réel.
   Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
   Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n,
$$u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

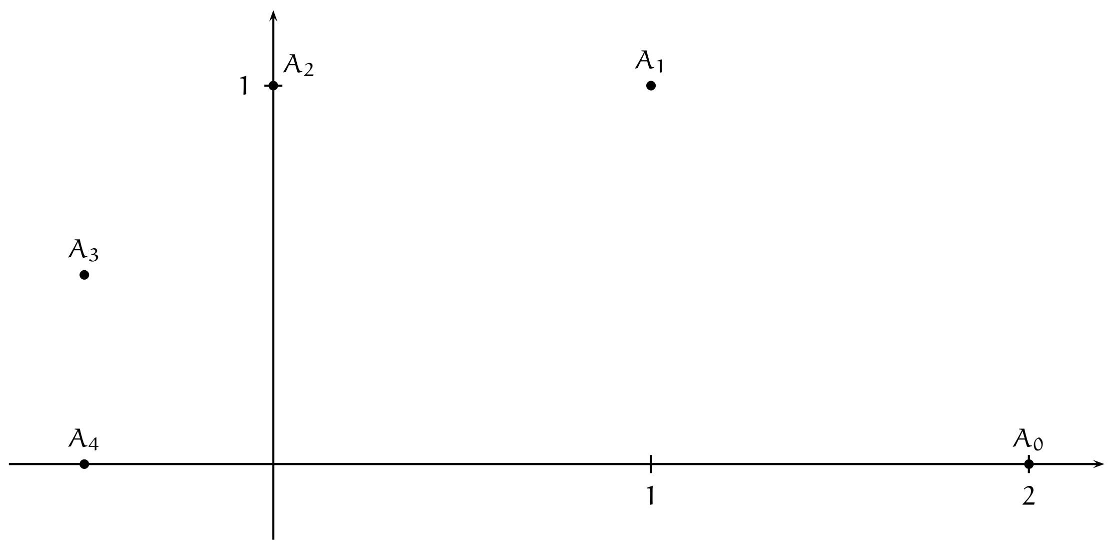
3. À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?

4. *a.* Établir que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \mathrm{i}$.
   En déduire la nature du triangle OA_nA_{n+1}.
   b. Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$.
   On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.
   Exprimer ℓ_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

Exercice 2

1. $z_1 = 2.\frac{1+i}{2} = 1+i$. $z_2 = \frac{1+i}{2}(1+i) = i$. $z_3 = \frac{1+i}{2}i = \frac{-1+i}{2}$. $z_4 = \frac{1+i}{2}\frac{-1+i}{2} = -\frac{1}{2}$. z_4 est bien un nombre réel.

$$\boxed{z_0 = 2,\ z_1 = 1+i,\ z_2 = i,\ z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \text{ et } z_4 = -\frac{1}{2}.}$$



2. On a $\left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{1}{2}|1+i| = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\frac{1+i}{2}\right|.|z_n| = \frac{1}{\sqrt{2}}u_n.$$

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On sait alors que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0.q^n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$. Donc

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.}$$

3. Soit n un entier naturel. On note $\mathscr{D}$ le disque de centre O et de rayon $0,1$.

$$\begin{aligned}
A_n \in \mathscr{D} &\Leftrightarrow OA_n \leq 0,1 \Leftrightarrow |z_n| \leq 0,1 \\
&\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq \frac{1}{20} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^n \geq 20 \text{ (par décroissance de la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{2}\right)^n \geq \ln(20) \quad \text{(par croissance de } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n\ln\left(2^{1/2}\right) \geq \ln(20) \Leftrightarrow n\frac{\ln(2)}{2} \geq \ln(20) \\
&\Leftrightarrow n \geq \frac{2\ln(20)}{\ln(2)} \Leftrightarrow n \geq 8,6... \\
&\Leftrightarrow n \geq 9.
\end{aligned}$$

$$\boxed{n_0 = 9.}$$

4. **a)** Pour tout entier naturel n, $u_n \neq 0$ et donc pour tout entier naturel n, $z_n \neq 0$. Soit alors n un entier naturel.

$$\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = 1 - \frac{z_n}{z_{n+1}} = 1 - \frac{2}{1+i} = 1 - \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1-(1-i) = i.$$

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ \frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = i.}$$

En passant aux modules, on obtient $|z_{n+1}-z_n| = |i|.|z_{n+1}|$ et donc

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ A_{n+1}A_n = A_{n+1}O \quad (1).$$

D'autre part, $z_{n+1}-z_n \neq 0$. On peut donc passer aux arguments ce qui fournit $\arg\left(\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right) = \arg(i)$ (modulo 2π). En interprétant cette égalité en terme d'angles et on obtient

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ \left(\overrightarrow{A_{n+1}O}, \overrightarrow{A_{n+1}A_n}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ (modulo } 2\pi) \quad (2).$$

Les égalités (1) et (2) montrent que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, \text{ le triangle } (OA_{n+1}A_n) \text{ est isocèle rectangle direct.}}$$

b) Soit k un entier naturel non nul.

$$A_{k-1}A_k = OA_k = u_k = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k.$$

On en déduit pour tout entier naturel n que

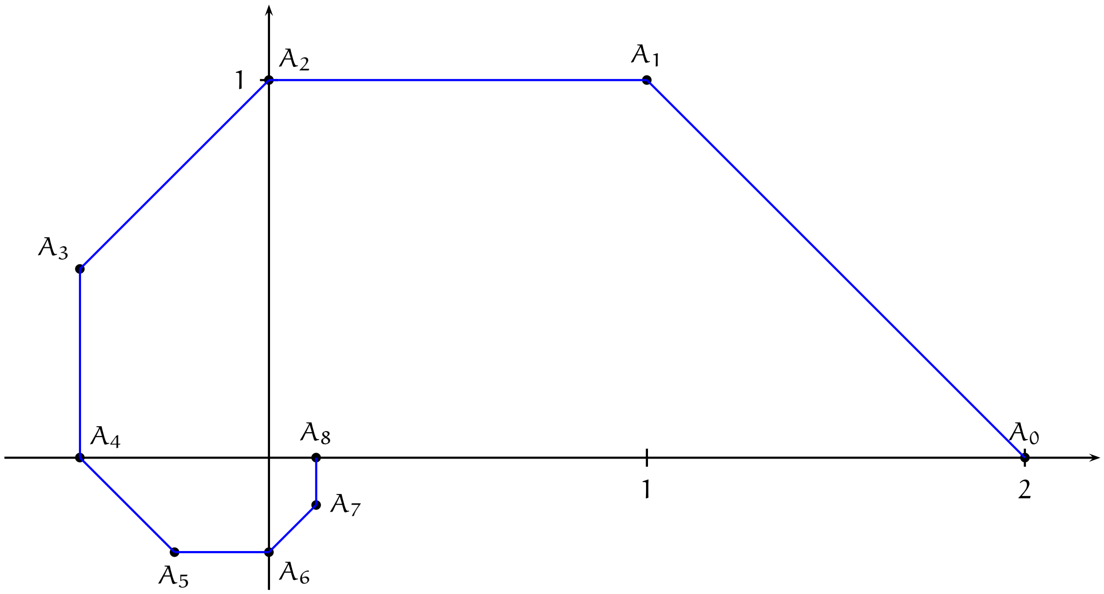
$$\ell_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^1 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \ldots 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 2.\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2}-1}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)$$

Cette égalité reste vraie quand $n = 0$ ($\ell_0 = 0$).

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ \ell_n = \frac{2}{\sqrt{2}-1}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right).}$$

Comme $-1 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, on sait que $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que la suite (ℓ_n) converge et que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \ell_n = \frac{2}{\sqrt{2}-1}.}$$



A_2
A_1
1
A_3
A_4
A_8
A_0
A_7
1
2
A_5
A_6

