

Exercice 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 5 cm.

On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$. On note A_n le point du plan d'affixe z_n .

1. Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 et vérifier que z_4 est un nombre réel.

Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure.

2. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$.

Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n.$$

3. À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?

4. a. Établir que, pour tout entier naturel n , $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i$.

En déduire la nature du triangle $OA_n A_{n+1}$.

b. Pour tout entier naturel n , on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0 A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$.

On a ainsi : $\ell_n = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n$.

Exprimer ℓ_n en fonction de n . Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

Tournez la page S.V.P.