EXERCICE 2 (5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Partie A

1. **a)** Donner la forme exponentielle de z_B puis de z_C.

b) Placer les points A, B et C.

2. Déterminer la nature du quadrilatère $OBAC$.

3. Déterminer et construire l'ensemble **D** des points M du plan tels que $|z| = |z-2|$.

Partie B

A tout point M d'affixe z tel que $z \neq z_A$, on associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = \dfrac{-4}{z-2}$

1. **a)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z = \dfrac{-4}{z-2}$

b) En déduire les points associés aux points B et C.

c) Déterminer et placer le point G' associé au centre de gravité G du triangle OAB.

2. **a) Question de cours :**

Prérequis : le module d'un nombre complexe z quelconque, noté $|z|$, vérifie $|z|^2 = z\bar{z}$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z.

Démontrer que :

- pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$
- pour tout nombre complexe z non nul, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$

b) Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2, $|z'-2| = \dfrac{2|z|}{|z-2|}$

c) On suppose dans cette question que M est un point quelconque de **D**, où **D** est l'ensemble défini à la question **3.** de la partie **A.**
Démontrer que le point M'associé à M appartient à un cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer Γ.

EXERCICE 2

Partie A

1. **a)** On a

$$z_B = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})\right) = 2e^{i\pi/3},$$

et

$$z_C = \overline{z_B} = 2e^{-i\pi/3}.$$

$$\boxed{z_B = 2e^{i\pi/3} \text{ et } z_C = \overline{z_B} = 2e^{-i\pi/3}.}$$

b) Voir graphique à la fin.

2. Puisque z_B et z_C sont conjugués, on a déjà

$$OB = OC = |z_B| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

Ensuite,

$$AB = |z_B - z_A| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \text{ et } AC = |z_C - z_A| = |\overline{z_B - z_A}| = |z_B - z_A| = AB.$$

Finalement,

$$OB = BA = AC = CO = 2.$$

$$\boxed{\text{Le quadrilatère } OBAC \text{ est un losange.}}$$

3. Soit z un nombre complexe dont l'image dans le plan est notée M.

$$|z| = |z-2| \Leftrightarrow OM = AM \Leftrightarrow M \in \text{med}[OA] \Leftrightarrow M \text{ appartient à la droite d'équatiion } x = 1.$$

$$\boxed{\mathcal{D} \text{ est la droite d'équation } x = 1.}$$

Voir graphique plus à la fin.

Partie B

1. Soit z un nombre complexe.

$$\begin{aligned} z = \frac{-4}{z-2} &\Leftrightarrow z(z-2) = -4 \text{ et } z \neq 2 \\ &\Leftrightarrow z(z-2) = -4 \text{ (car 2 n'est pas solution de l'équation } z(z-2) = -4 \\ &\Leftrightarrow z^2 - 2z + 4 = 0 \quad (*). \end{aligned}$$

Le discriminant Δ de l'équation $(*)$ vaut $(-2)^2 - 4.4$ ou encore

$$\Delta = -12 = (2i\sqrt{3})^2.$$

Puisque $\Delta < 0$, l'équation $(*)$ admet deux solutions non réelles conjuguées :

$$z_1 = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3} = z_B \quad \text{et} \quad z_2 = 1 - i\sqrt{3} = z_C.$$

b) On en déduit que le point associé à B est B lui-même et le point associé à C est C lui-même.

c) Calculons tout d'abord z_G.

© Jean-Louis Rouget, 2006. Tous droits réservés.

$$z_G = \frac{1}{3}(z_O + z_A + z_B) = \frac{1}{3}(2 + 1 + i\sqrt{3}) = \frac{3 + i\sqrt{3}}{3}.$$

Mais alors

$$z_{G'} = \frac{-4}{\dfrac{3 + i\sqrt{3}}{3} - 2} = \frac{-12}{-3 + i\sqrt{3}} = \frac{-12(-3 - i\sqrt{3})}{(-3 + i\sqrt{3})(-3 - i\sqrt{3})} = \frac{-12(-3 - i\sqrt{3})}{12} = 3 + i\sqrt{3}.$$

$$\boxed{G'(3, \sqrt{3}).}$$

2. a) Question de cours :

• Montrons tout d'abord que pour tous complexes z_1 et z_2, on a $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$. Pour cela, posons $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ où a_1, b_1, a_2 et b_2 sont quatre réels. On a alors

$$\begin{aligned}\overline{z_1}.\overline{z_2} &= (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) - i(a_1b_2 + b_1a_2)\\ &= \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)} = \overline{(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)}\\ &= \overline{z_1 z_2}.\end{aligned}$$

Montrons alors que pour tous complexes z_1 et z_2, on a $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$.

$$|z_1.z_2|^2 = (z_1z_2).(\overline{z_1z_2}) = z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2} = |z_1|^2|z_2|^2,$$

et puisque $|z_1.z_2|$, $|z_1|$ et $|z_2|$ sont des réels positifs, en prenant la racine carrée des deux membres, on obtient

$$|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|.$$

• Soit z un nombre complexe non nul. D'après ce qui précède,

$$|z|.\left|\frac{1}{z}\right| = \left|z.\frac{1}{z}\right| = |1| = 1,$$

et donc

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}.$$

b) Soit z un nombre complexe distinct de 2. On a

$$|z' - 2| = \left|\frac{-4}{z-2} - 2\right| = \left|\frac{-4 - 2z + 4}{z-2}\right| = \left|\frac{-2z}{z-2}\right| = \frac{|-2|.|z|}{|z-2|} = \frac{2|z|}{|z-2|}.$$

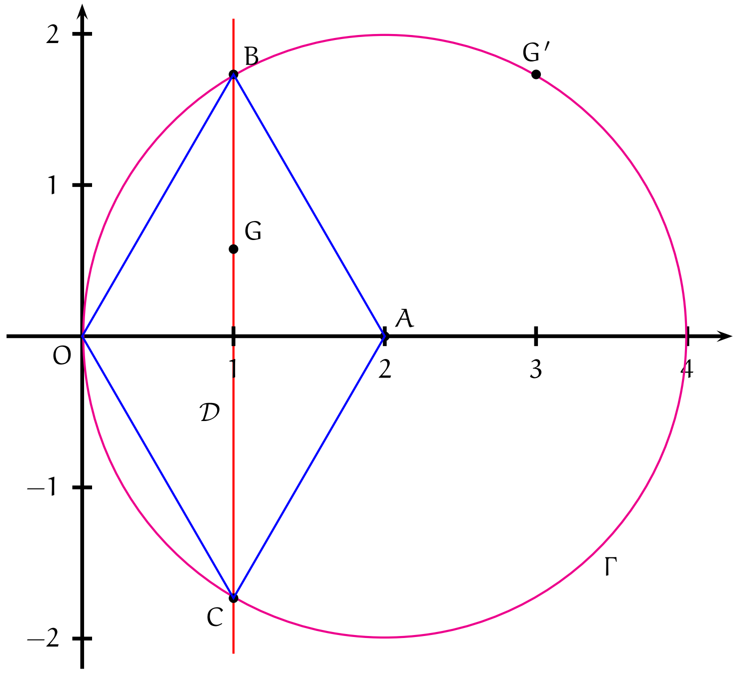
$$\boxed{\text{pour tout nombre complexe } z \text{ distinct de 2, } |z' - 2| = \frac{2|z|}{|z-2|}.}$$

c) Soit M un point de $\mathcal{D}$ dont l'affixe est notée z. Alors, $|z| = |z - 2|$ et on a

$$|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z-2|} = \frac{2|z|}{|z|} = 2.$$

On en déduit que $IM' = 2$ où $I(2, 0)$ et donc que M' appartient au cercle Γ de centre $I(2, 0)$ et de rayon 2.

 © Jean-Louis Rouget, 2006. Tous droits réservés.



 © Jean-Louis Rouget, 2006. Tous droits réservés.