EXERCICE 2 (5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Partie A

1. **a)** Donner la forme exponentielle de z_B puis de z_C.

b) Placer les points A, B et C.

2. Déterminer la nature du quadrilatère $OBAC$.

3. Déterminer et construire l'ensemble **D** des points M du plan tels que $|z| = |z-2|$.

Partie B

A tout point M d'affixe z tel que $z \neq z_A$, on associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = \dfrac{-4}{z-2}$

1. **a)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z = \dfrac{-4}{z-2}$

b) En déduire les points associés aux points B et C.

c) Déterminer et placer le point G' associé au centre de gravité G du triangle OAB.

2. **a) Question de cours :**

Prérequis : le module d'un nombre complexe z quelconque, noté $|z|$, vérifie $|z|^2 = z\bar{z}$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z.

Démontrer que :

- pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$
- pour tout nombre complexe z non nul, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$

b) Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2, $|z'-2| = \dfrac{2|z|}{|z-2|}$

c) On suppose dans cette question que M est un point quelconque de **D**, où **D** est l'ensemble défini à la question **3.** de la partie **A**.

Démontrer que le point M' associé à M appartient à un cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer Γ.