Exercice 2 (*5 points*)

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

I) Restitution organisée de connaissances.

1) Démontrer qu' un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.
2) Démontrer qu' un nombre complexe z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
3) Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $z\overline{z} = |z|^2$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.
On se propose de démontrer, à l'aide des nombres complexes, que tout triangle de sommets A,B,C, deux à deux distincts, d' affixes respective a,b,c, et dont le centre du cercle circonscrit est situé à l'origine O, a pour orthocentre le point H d'affixe $a+b+c$.

II) Etude d'un cas particulier.

On pose : $a = 3+\mathrm{i}$; $b = -1+3\mathrm{i}$; $c = -\sqrt{5} - \mathrm{i}\sqrt{5}$.

1) Vérifier que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
2) Placer les points A,B,C et le point H d'affixe $a+b+c$, puis vérifier graphiquement que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

III) Etude du cas général.

ABC est un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit, et a, b, c sont les affixes respectives des points A,B,C.

1) Justifier le fait que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si :
$$a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c}.$$
2) On pose $w = \overline{b}c - b\overline{c}$.
   a) En utilisant la caractérisation d'un nombre imaginaire pur établie dans le I), démontrer que w est imaginaire pur.
   b) Vérifier l'égalité : $(b+c)(\overline{b}-\overline{c}) = w$ et justifier que : $\dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{w}{|b-c|^2}$.
   c) En déduire que le nombre complexe $\dfrac{b+c}{b-c}$ est imaginaire pur.
3) Soit H le point d'affixe $a+b+c$.
   a) Exprimer en fonction de a,b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$.
   b) Prouver que $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AH}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, où k est un entier relatif quelconque.

   (On admet de même que $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BH}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \square$.) Z

   c) Que représente le point H pour le triangle ABC ?

EXERCICE 2

I) Restitution organisée de connaissances

Soit z un nombre complexe. Notons x la partie réelle de z et y sa partie imaginaire de sorte que $z = x + iy$.

1)

$$\overline{z} = -z \Leftrightarrow x - iy = -x - iy \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow z \text{ imaginaire pur.}$$

$$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } z,\ z \text{ est imaginaire pur si et seulement si } \overline{z} = -z.}$$

2) De même

$$\overline{z} = z \Leftrightarrow x - iy = x + iy \Leftrightarrow 2iy = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \text{ réel.}$$

$$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } z,\ z \text{ est réel si et seulement si } \overline{z} = z.}$$

3)

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = |z|^2.$$

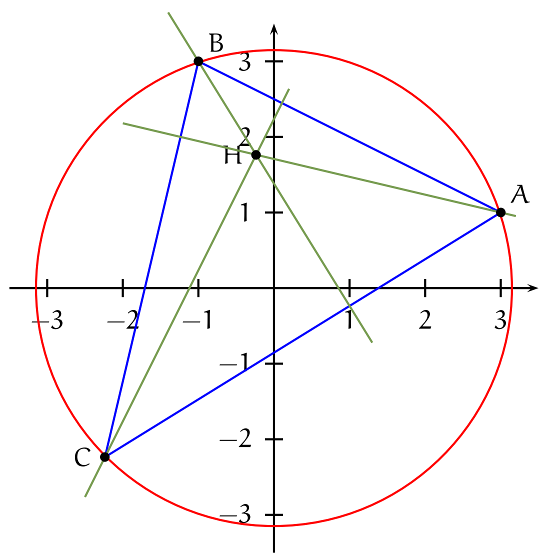
$$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } z,\ z\overline{z} = |z|^2.}$$

II) Etude d'un cas particulier.

1) $OA = |a| = |3 + i| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$, $OB = |b| = |-1 + 3i| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ et $OC = |c| = |-\sqrt{5} - i\sqrt{5}| = \sqrt{(-\sqrt{5})^2 + (-\sqrt{5})^2} = \sqrt{10}$. Donc, $OA = OB = OC = \sqrt{10}$ ce qui montre que

$$\boxed{O \text{ est le centre du cercle circonscrit au triangle } ABC.}$$

2) $a + b + c = 3 + i - 1 + 3i - \sqrt{5} - i\sqrt{5} = (2 - \sqrt{5}) + (4 - \sqrt{5})i$. Donc H est le point de coordonnées $(2 - \sqrt{5}, 4 - \sqrt{5})$.



Sur le graphique ci-dessus, il semble que le point H d'affixe $a + b + c$ est l'orthocentre du triangle ABC.

III) Etude du cas général.

1)

$$\text{O centre du cercle circonscrit au triangle } ABC \Leftrightarrow OA = OB = OC$$
$$\Leftrightarrow |a| = |b| = |c| \Leftrightarrow |a|^2 = |b|^2 = |c|^2 \Leftrightarrow a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c}.$$

2) a)

$$\overline{w} = \overline{\overline{b}c - b\overline{c}} = \overline{\overline{b}}\overline{c} - \overline{b}\overline{\overline{c}} = b\overline{c} - \overline{b}c = -(\overline{b}c - b\overline{c}) = -w.$$

Mais alors, la question I)1) permet d'affirmer que

$$\boxed{w \text{ est imaginaire pur.}}$$

b) D'après la question II)1), $b\overline{b} = c\overline{c}$ et donc

$$(b+c)(\overline{b}-\overline{c}) = b\overline{b} - c\overline{c} + \overline{b}c - b\overline{c} = 0 + w = w,$$

et donc

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{(b+c)\overline{(b-c)}}{(b-c)\overline{(b-c)}} = \frac{(b+c)(\overline{b}-\overline{c})}{|b-c|^2} = \frac{w}{|b-c|^2}.$$

$$\boxed{\frac{b+c}{b-c} = \frac{w}{|b-c|^2}.}$$

c) $\dfrac{1}{|b-c|^2}$ est un réel et w est un imaginaire pur. Donc $\dfrac{w}{|b-c|^2}$ est un imaginaire pur et finalement

$$\boxed{\frac{b+c}{b-c} \text{ est un imaginaire pur.}}$$

3) a) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{CB}$ est $b-c$ et d'autre part

$$z_{\overrightarrow{AH}} = z_H - z_A = (a+b+c) - a = b+c.$$

$$\boxed{z_{\overrightarrow{AH}} = b+c \text{ et } z_{\overrightarrow{CB}} = b-c.}$$

b) (Omission de l'énoncé : dans cette question il faut supposer de plus que $b \neq -c$ (ou encore que O n'est pas le milieu du segment [BC])). Dans ce cas, $\dfrac{b+c}{b-c}$ est un imaginaire pur non nul et on sait que $\arg\left(\dfrac{b+c}{b-c}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Mais alors

$$\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}\right) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AH}}}{z_{\overrightarrow{CB}}}\right) = \arg\left(\frac{b+c}{b-c}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

$$\boxed{\text{Si } b \neq -c,\ \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$$

c) • Si $b \neq -c$, les résultats de la question précédente montrent que H est sur la perpendiculaire à la droite (BC) passant par A ou encore la hauteur issue de A du triangle ABC et aussi sur la hauteur issue de B du triangle ABC. H est donc sur deux des trois hauteurs du triangle ABC ou encore H est l'orthocentre du triangle ABC.

• Si $b = -c$, le point O est le milieu du segment [BC]. Le segment [BC] est donc un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC. On en déduit que le triangle ABC est rectangle en A et donc que l'orthocentre du triangle ABC est le point A. Or l'affixe du point H est $a + (b+c)$ c'est-à-dire a et donc $H = A$. Dans ce cas aussi, H est l'orthocentre du triangle ABC.

Dans tous les cas,

$$\boxed{\text{le point } H \text{ d'affixe } a+b+c \text{ est l'orthocentre du triangle } ABC.}$$

