Exercice 2 (*5 points*)

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

I) Restitution organisée de connaissances.

1) Démontrer qu' un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$.
2) Démontrer qu' un nombre complexe z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$.
3) Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $z\bar{z} = |z|^2$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On se propose de démontrer, à l'aide des nombres complexes, que tout triangle de sommets A, B, C, deux à deux distincts, d' affixes respective a, b, c, et dont le centre du cercle circonscrit est situé à l'origine O, a pour orthocentre le point H d'affixe $a+b+c$.

II) Etude d'un cas particulier.

On pose : $a = 3+\mathrm{i}$; $b = -1+3\mathrm{i}$; $c = -\sqrt{5} - \mathrm{i}\sqrt{5}$.

1) Vérifier que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
2) Placer les points A, B, C et le point H d'affixe $a+b+c$, puis vérifier graphiquement que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

III) Etude du cas général.

ABC est un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit, et a, b, c sont les affixes respectives des points A, B, C.

1) Justifier le fait que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si :
$$a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c}.$$
2) On pose $w = \bar{b}c - b\bar{c}$.
   a) En utilisant la caractérisation d'un nombre imaginaire pur établie dans le I), démontrer que w est imaginaire pur.
   b) Vérifier l'égalité : $(b+c)(\bar{b}-\bar{c}) = w$ et justifier que : $\dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{w}{|b-c|^2}$.
   c) En déduire que le nombre complexe $\dfrac{b+c}{b-c}$ est imaginaire pur.
3) Soit H le point d'affixe $a+b+c$.
   a) Exprimer en fonction de a, b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$.
   b) Prouver que $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, où k est un entier relatif quelconque.

   (On admet de même que $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BH}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in$ □ .) Z

   c) Que représente le point H pour le triangle ABC ?