EXERCICE 3 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'équation : (E) $z^3-(4+\mathrm{i})\ z^2+(13+4\mathrm{i})\ z-13\mathrm{i}=0$ où z est un nombre complexe.

1) Démontrer que le nombre complexe i est solution de cette équation.

2) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z on ait :
$z^3-(4+\mathrm{i})\ z^2+(13+4\mathrm{i})\ z-13\mathrm{i}=(z-\mathrm{i})(az^2+bz+c)$.

3) En déduire les solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives i, $2+3\mathrm{i}$ et $2-3\mathrm{i}$.

1) Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'affixe du point A′, image du point A par la rotation r.

2) Démontrer que les points A′, B et C sont alignés et déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B qui transforme C en A′.

EXERCICE 3

Partie A

1) $i^3 - (4+i)i^2 + (13+4i)i - 13i = -i + 4 + i + 13i - 4 - 13i = 0$ et donc

$$\boxed{i \text{ est solution de l'équation } (E).}$$

2) Soient a, b et c trois nombres complexes. Pour tout nombre complexe z, on a

$$(z-i)(az^2+bz+c) = az^3 + bz^2 + cz - iaz^2 - ibz - ic = az^3 + (b-ia)z^2 + (c-ib)z - ic.$$

Mais alors, si $a = 1$, $b - ia = -(4+i)$, $c - ib = 13+4i$ et $-ic = -13i$, l'égalité de l'énoncé est bien valable pour tout nombre complexe z. Or

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - ia = -(4+i) \\ c - ib = 13+4i \\ -ic = -13i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -(4+i)+i \\ c = 13+4i+ib \\ c = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 13+4i-4i \\ c = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 13 \end{cases}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } z,\ z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)(z^2-4z+13).}$$

3) Pour tout nombre complexe z,

$$(z-i)(z^2-4z+13) = 0 \Leftrightarrow z = i \text{ ou } z^2 - 4z + 13 = 0.$$

Calculons le discriminant de l'équation $z^2 - 4z + 13 = 0$. $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 13 = 16 - 52 = -36 = (6i)^2$. L'équation $z^2 - 4z + 13 = 0$ admet donc deux solutions non réelles conjuguées :

$$z_1 = \frac{4+6i}{2} = 2+3i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 2-3i.$$

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } (E) \text{ sont } i,\ 2+3i \text{ et } 2-3i.}$$

Partie B

1) On sait que l'expression complexe de la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ est

$$z' = e^{i\theta}(z-\omega) + \omega.$$

Ici on a

$$\begin{aligned} z_{A'} &= e^{i\pi/4}(z_A - z_B) + z_B = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(i - (2+3i)) + 2 + 3i \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \times (-2-2i) + 2 + 3i = -\sqrt{2}(1+i)^2 + 2 + 3i = -\sqrt{2}(1+2i-1) + 2 + 3i \\ &= 2 + (3-2\sqrt{2})i. \end{aligned}$$

$$\boxed{z_{A'} = 2 + (3-2\sqrt{2})i.}$$

2) Les points A', B et C sont sur la droite d'équation $x = 2$ et donc

$$\boxed{\text{les points } A', B \text{ et } C \text{ sont alignés.}}$$

Ces points étant deux à deux distincts, on en déduit qu'il existe une homothétie de centre B et une seule transformant C en A'. Notons k son rapport. On a $z_C - z_B = (2-3i) - (2+3i) = -6i$ et $z_{A'} - z_B = 2 + (3-2\sqrt{2})i - (2+3i) = -2\sqrt{2}i$. On en déduit que

$$k = \frac{z_{A'} - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-2\sqrt{2}i}{-6i} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$\boxed{\text{Le rapport de l'homothétie de centre B qui transforme C en } A' \text{ est } \frac{\sqrt{2}}{3}.}$$