

EXERCICE 3

Partie A

1) $i^3 - (4+i)i^2 + (13+4i)i - 13i = -i + 4 + i + 13i - 4 - 13i = 0$ et donc

i est solution de l'équation (E).

2) Soient a , b et c trois nombres complexes. Pour tout nombre complexe z , on a

$$(z-i)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - iaz^2 - ibz - ic = az^3 + (b-ia)z^2 + (c-ib)z - ic.$$

Mais alors, si $a = 1$, $b - ia = -(4+i)$, $c - ib = 13 + 4i$ et $-ic = -13i$, l'égalité de l'énoncé est bien valable pour tout nombre complexe z . Or

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - ia = -(4+i) \\ c - ib = 13 + 4i \\ -ic = -13i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -(4+i) + i \\ c = 13 + 4i + ib \\ c = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 13 + 4i - 4i \\ c = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 13 \end{cases}.$$

Pour tout nombre complexe z , $z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)(z^2 - 4z + 13)$.

3) Pour tout nombre complexe z ,

$$(z-i)(z^2 - 4z + 13) = 0 \Leftrightarrow z = i \text{ ou } z^2 - 4z + 13 = 0.$$

Calculons le discriminant de l'équation $z^2 - 4z + 13 = 0$. $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 13 = 16 - 52 = -36 = (6i)^2$. L'équation $z^2 - 4z + 13 = 0$ admet donc deux solutions non réelles conjuguées :

$$z_1 = \frac{4+6i}{2} = 2+3i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 2-3i.$$

Les solutions de l'équation (E) sont i , $2+3i$ et $2-3i$.

Partie B

1) On sait que l'expression complexe de la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ est

$$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega.$$

Ici on a

$$\begin{aligned} z_{A'} &= e^{i\pi/4}(z_A - z_B) + z_B = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(i - (2+3i)) + 2+3i \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \times (-2-2i) + 2+3i = -\sqrt{2}(1+i)^2 + 2+3i = -\sqrt{2}(1+2i-1) + 2+3i \\ &= 2 + (3-2\sqrt{2})i. \end{aligned}$$

$$z_{A'} = 2 + (3-2\sqrt{2})i.$$

2) Les points A' , B et C sont sur la droite d'équation $x = 2$ et donc

les points A' , B et C sont alignés.

Ces points étant deux à deux distincts, on en déduit qu'il existe une homothétie de centre B et une seule transformant C en A' . Notons k son rapport. On a $z_C - z_B = (2 - 3i) - (2 + 3i) = -6i$ et $z_{A'} - z_B = 2 + (3 - 2\sqrt{2})i - (2 + 3i) = -2\sqrt{2}i$. On en déduit que

$$k = \frac{z_{A'} - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-2\sqrt{2}i}{-6i} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Le rapport de l'homothétie de centre B qui transforme C en A' est $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

