

EXERCICE 2 (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 1 cm pour unité graphique.

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Résoudre, dans l'ensemble \mathbf{C} des nombres complexes, l'équation : $\bar{z} - 3iz - 3 + 6i = 0$,
 \bar{z} étant le conjugué de z .

2. On considère le point A d'affixe $4 - 2i$.

Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point B tel que OAB soit un triangle équilatéral de sens direct.

3. Soit D le point d'affixe $2i$.

- a) Représenter l'ensemble (E) des points M d'affixe z différente de $2i$ tels que :

$$\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

- b) Représenter l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que $z = 2i + 2e^{i\theta}$,
 θ appartenant à \mathbf{R} .

4. À tout point M d'affixe $z \neq -2$, on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{z-1}{\bar{z}+2}$.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z différente de -2 tels que $|z'| = 1$.

EXERCICE 2

1. Soit z un nombre complexe dont les parties réelles et imaginaires sont notées respectivement x et y .

$$\begin{aligned} \bar{z} - 3iz - 3 + 6i = 0 &\Leftrightarrow (x - iy) - 3i(x + iy) - 3 + 6i = 0 \Leftrightarrow x - iy - 3ix + 3y - 3 + 6i = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 3y - 3) + i(-3x - y + 6) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 3 = 0 \\ -3x - y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x + 6 \\ x + 3(-3x + 6) - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x + 6 \\ -8x + 15 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{8} \\ y = -3 \times \frac{15}{8} + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{8} \\ y = \frac{3}{8} \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\left\{ \frac{15 + 3i}{8} \right\}$.

2. Notons r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. L'expression complexe de r est $z' = e^{i\pi/3}z$ ou encore $z' = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})z$. On a alors

$$\begin{aligned} \text{OAB équilatéral direct} &\Leftrightarrow OB = OA \text{ et } (\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow B = r(A) \\ &\Leftrightarrow z_B = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})z_A \Leftrightarrow z_B = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})(4 - 2i) \Leftrightarrow z_B = (1 + i\sqrt{3})(2 - i) \\ &\Leftrightarrow z_B = (2 + \sqrt{3}) + i(2\sqrt{3} - 1). \end{aligned}$$

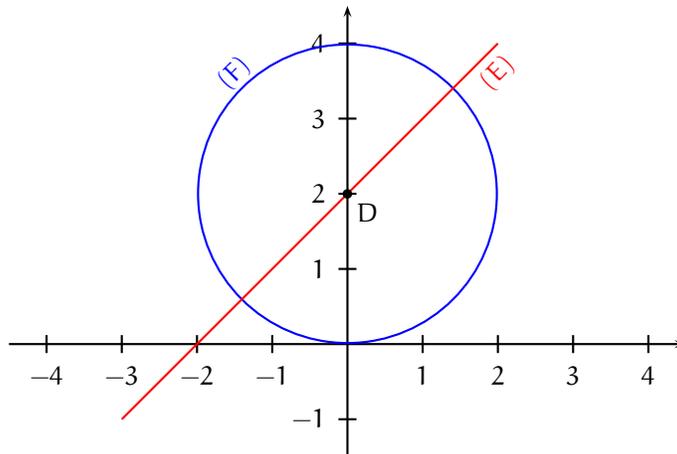
$$z_B = (2 + \sqrt{3}) + i(2\sqrt{3} - 1).$$

3. a) et b) Soit M un point du plan distinct de D dont l'affixe est notée z .

$$\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{DM}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

L'ensemble (E) est la droite passant par $D(0, 2)$ d'angle polaire $\frac{\pi}{4}$ privée de D ou encore la droite passant par D et de coefficient directeur 1, privée de D . (E) est donc la droite d'équation cartésienne $y = x + 2$ privée du point de coordonnées $(0, 2)$.

On sait d'autre part que (F) est le cercle de centre D et de rayon 2.



4. Soit M un point du plan dont l'affixe z est un nombre complexe distinct de -2 . Soient G et H les points d'affixes respectives 1 et -2 . On note tout d'abord que $z \neq -2 \Leftrightarrow \bar{z} \neq \overline{-2} \Leftrightarrow \bar{z} \neq -2 \Leftrightarrow \bar{z} + 2 \neq 0 \Leftrightarrow |\bar{z} + 2| \neq 0$. Par suite

$$\begin{aligned}
 |z'| = 1 &\Leftrightarrow \left| \frac{z-1}{\bar{z}+2} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-1|}{|\bar{z}+2|} = 1 \\
 &\Leftrightarrow |z-1| = |\bar{z}+2| \text{ et } |\bar{z}+2| \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow |z-1| = |\bar{z}+2| \text{ (car } -2 \text{ n'est pas solution de l'équation } |z-1| = |\bar{z}+2|) \\
 &\Leftrightarrow |z-1| = |\overline{\bar{z}+2}| \Leftrightarrow |z-1| = |z+2| \Leftrightarrow |z-z_G| = |z-z_H| \\
 &\Leftrightarrow GM = HM \Leftrightarrow M \in \text{med}[GH].
 \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[GH]$ c'est-à-dire la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.