

EXERCICE 2 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

1. Dans cette question, il est demandé au candidat d'exposer des connaissances

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soit R la rotation du plan de centre Ω , d'affixe ω et d'angle de mesure θ . L'image par R d'un point du plan est donc définie de la manière suivante :

- $R(\Omega) = \Omega$
- pour tout point M du plan, distinct de Ω , l'image M' de M est définie par $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta [2\pi]$.

On rappelle que, pour des points A et B , d'affixes respectives a et b , $AB = |b - a|$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(b - a) [2\pi]$.

Question : Montrer que les affixes z et z' d'un point quelconque M du plan et de son image M' par la rotation R , sont liées par la relation

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

2. On considère les points I et B d'affixes respectives $z_I = 1 + i$ et $z_B = 2 + 2i$. Soit R la rotation de centre B et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

a. Donner l'écriture complexe de R .

b. Soit A l'image de I par R . Calculer l'affixe z_A de A .

c. Montrer que O , A et B sont sur un même cercle de centre I . En déduire que OAB est un triangle rectangle en A . Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

d. En déduire une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OA})$.

3. Soit T la translation de vecteur \overrightarrow{IO} . On pose $A' = T(A)$.

a. Calculer l'affixe $z_{A'}$ de A' .

b. Quelle est la nature du quadrilatère $OIAA'$?

c. Montrer que $-\frac{\pi}{12}$ est un argument de $z_{A'}$.

EXERCICE 2

1) • Si $M = \Omega$ alors $z = \omega$, puis $M' = \Omega$ et $z' = \omega$. Dans ce cas on a bien $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

• Si $M \neq \Omega$, alors $M' \neq \Omega$ et M' est le point du plan tel que $\frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta [2\pi]$. Mais alors

$$\left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = \frac{|z' - \omega|}{|z - \omega|} = \frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \text{ et}$$

$$\arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \arg(z' - \omega) - \arg(z - \omega) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\Omega M'}) - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\Omega M}) = (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta [2\pi].$$

Ainsi, $\frac{z' - \omega}{z - \omega}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ c'est-à-dire le nombre $e^{i\theta}$. On a ainsi montré que

$$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta} \text{ ou encore que}$$

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

2) a. L'expression complexe de R est

$$\begin{aligned} z' &= e^{i\pi/3}(z - z_B) + z_B = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})(z - (2 + 2i)) + 2 + 2i = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z - (1 + i\sqrt{3})(1 + i) + 2 + 2i \\ &= \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z + (1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i. \end{aligned}$$

$$\text{L'expression complexe de R est } z' = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z + 1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})i.$$

b. On a

$$z_A = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}(1 + i) + 1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})i = \frac{1 - \sqrt{3} + 2 + 2\sqrt{3}}{2} + i\frac{1 + \sqrt{3} + 2 - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + i\frac{3 - \sqrt{3}}{2}.$$

$$z_A = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + i\frac{3 - \sqrt{3}}{2}.$$

c. Puisque $\frac{z_O + z_B}{2} = \frac{1}{2}z_B = 1 + i = z_I$, I est le milieu du segment [OB]. Donc IB = IO. D'autre part, BI = BA et $\widehat{IBA} = \frac{\pi}{3}$. Par suite, le triangle ABI est équilatéral. On en déduit que IA = IB. Finalement,

$$IA = IB = OI = |z_I| = \sqrt{2},$$

et donc

les points O, A et B sont sur le cercle \mathcal{C} de centre I et de rayon $\sqrt{2}$.

Puisque I est le milieu du segment [OB], \mathcal{C} est aussi le cercle de diamètre [OB]. Puisque le point A est sur \mathcal{C}

le triangle OAB est rectangle en A.

Le triangle OAB est rectangle en A et $\widehat{OBA} = \frac{\pi}{3}$. Donc $\widehat{BOA} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$. De plus, A est en dessous de la droite (OB) (puisque la droite (OB) a pour équation $y = x$ et que $y_A < x_A$). Par suite, l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ admet une mesure dans $[0, \pi]$. On en déduit que

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{6} [2\pi].$$

d. Il est clair que $\arg(z_B) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ ou encore $(\vec{u}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$. Mais alors

$$(\vec{u}, \vec{OA}) = (\vec{u}, \vec{OB}) + (\vec{OB}, \vec{OA}) = (\vec{u}, \vec{OB}) - (\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} [2\pi].$$

$$\boxed{(\vec{u}, \vec{OA}) = \frac{\pi}{12} [2\pi].}$$

3) a. L'expression complexe de T est $z' = z + z_{I\bar{O}} = z - z_I = z - (1 + i)$. Donc

$$z'_A = z_A - (1 + i) = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + i\frac{3 - \sqrt{3}}{2} - (1 + i) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i\frac{1 - \sqrt{3}}{2}.$$

$$\boxed{z'_A = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i\frac{1 - \sqrt{3}}{2}.}$$

b. Puisque $T(A) = A'$, on a $\vec{AA'} = \vec{IO}$. Donc le quadrilatère $OIAA'$ est un parallélogramme. De plus $IA = IO = \sqrt{2}$ et donc

le quadrilatère $OIAA'$ est un losange.

c. Le quadrilatère $OIAA'$ est un losange. Donc la droite (OA) est bissectrice de l'angle $(\vec{OA'}, \vec{OI})$. D'après la question 2.b., on a donc

$$\begin{aligned} (\vec{OA'}, \vec{OA}) &= (\vec{OA}, \vec{OI}) = (\vec{OA}, \vec{OB}) \text{ (car } \vec{OI} \text{ et } \vec{OB} \text{ sont colinéaires et de même sens)} \\ &= \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Mais alors, d'après la question 2.d.,

$$\arg(z_{A'}) = (\vec{u}, \vec{OA'}) = (\vec{u}, \vec{OA}) + (\vec{OA}, \vec{OA'}) = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{12} [2\pi].$$

$$\boxed{\arg(z_{A'}) = -\frac{\pi}{12} [2\pi].}$$

