EXERCICE 2

1) • Si $M = \Omega$ alors $z = \omega$, puis $M' = \Omega$ et $z' = \omega$. Dans ce cas on a bien $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

• Si $M \neq \Omega$, alors $M' \neq \Omega$ et M' est le point du plan tel que $\dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = 1$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta\ [2\pi]$. Mais alors $\left|\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = \dfrac{|z' - \omega|}{|z - \omega|} = \dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = 1$ et

$$\arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \arg(z' - \omega) - \arg(z - \omega) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) - \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\Omega M}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta\ [2\pi].$$

Ainsi, $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ c'est-à-dire le nombre $e^{i\theta}$. On a ainsi montré que $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$ ou encore que

$$\boxed{z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).}$$

2) **a.** L'expression complexe de R est

$$z' = e^{i\pi/3}(z - z_B) + z_B = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})(z - (2 + 2i)) + 2 + 2i = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z - (1 + i\sqrt{3})(1 + i) + 2 + 2i$$
$$= \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z + (1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i.$$

$$\boxed{\text{L'expression complexe de } R \text{ est } z' = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z + 1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})i.}$$

b. On a

$$z_A = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}(1 + i) + 1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})i = \frac{1 - \sqrt{3} + 2 + 2\sqrt{3}}{2} + i\frac{1 + \sqrt{3} + 2 - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + i\frac{3 - \sqrt{3}}{2}.$$

$$\boxed{z_A = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + i\frac{3 - \sqrt{3}}{2}.}$$

c. Puisque $\dfrac{z_O + z_B}{2} = \dfrac{1}{2}z_B = 1 + i = z_I$, I est le milieu du segment $[OB]$. Donc $IB = IO$. D'autre part, $BI = BA$ et $\widehat{IBA} = \dfrac{\pi}{3}$. Par suite, le triangle ABI est équilatéral. On en déduit que $IA = IB$. Finalement,

$$IA = IB = OI = |z_I| = \sqrt{2},$$

et donc

les points O, A et B sont sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon $\sqrt{2}$.

Puisque I est le milieu du segment $[OB]$, $\mathscr{C}$ est aussi le cercle de diamètre $[OB]$. Puisque le point A est sur $\mathscr{C}$

$$\boxed{\text{le triangle } OAB \text{ est rectangle en } A.}$$

Le triangle OAB est rectangle en A et $\widehat{OBA} = \dfrac{\pi}{3}$. Donc $\widehat{BOA} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}$. De plus, A est en dessous de la droite (OB) (puisque la droite (OB) a pour équation $y = x$ et que $y_A < x_A$). Par suite, l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ admet une mesure dans $[0, \pi]$. On en déduit que

$$\boxed{\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi].}$$

d. Il est clair que $\arg(z_B) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ ou encore $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$. Mais alors

$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OB}\right) - \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}\ [2\pi].$$

$$\boxed{\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{12}\ [2\pi].}$$

3) **a.** L'expression complexe de T est $z' = z + z_{\overrightarrow{IO}} = z - z_I = z - (1 + i)$. Donc

$$z'_A = z_A - (1+i) = \frac{3+\sqrt{3}}{2} + i\frac{3-\sqrt{3}}{2} - (1+i) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

$$\boxed{z'_A = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2}.}$$

b. Puisque $T(A) = A'$, on a $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{IO}$. Donc le quadrilatère $OIAA'$ est un parallélogramme. De plus $IA = IO = \sqrt{2}$ et donc

$$\boxed{\text{le quadrilatère } OIAA' \text{ est un losange.}}$$

c. Le quadrilatère $OIAA'$ est un losange. Donc la droite (OA) est bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OI})$. D'après la question 2.b., on a donc

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OA}) &= (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \text{ (car } \overrightarrow{OI} \text{ et } \overrightarrow{OB} \text{ sont colinéaires et de même sens)}\\ &= \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

Mais alors, d'après la question 2.d.,

$$\arg(z_{A'}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{12}\ [2\pi].$$

$$\boxed{\arg(z_{A'}) = -\frac{\pi}{12}\ [2\pi].}$$