EXERCICE 2 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

1. *Dans cette question, il est demandé au candidat d'exposer des connaissances*

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Soit R la rotation du plan de centre Ω, d'affixe ω et d'angle de mesure θ. L'image par R d'un point du plan est donc définie de la manière suivante :
- $R(\Omega) = \Omega$
- pour tout point M du plan, distinct de Ω, l'image M' de M est définie par $\Omega M' = \Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta\ [2\pi]$.

On rappelle que, pour des points A et B, d'affixes respectives a et b, $AB = |b - a|$ et $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(b - a)\ [2\pi]$.

Question : Montrer que les affixes z et z' d'un point quelconque M du plan et de son image M' par la rotation R, sont liées par la relation

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

2. On considère les points I et B d'affixes respectives $z_I = 1 + i$ et $z_B = 2 + 2i$. Soit R la rotation de centre B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$.

a. Donner l'écriture complexe de R.

b. Soit A l'image de I par R. Calculer l'affixe z_A de A.

c. Montrer que O, A et B sont sur un même cercle de centre I. En déduire que OAB est un triangle rectangle en A. Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

d. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}\right)$.

3. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{IO}$. On pose $A' = T(A)$.

a. Calculer l'affixe $z_{A'}$ de A'.

b. Quelle est la nature du quadrilatère $OIAA'$?

c. Montrer que $-\dfrac{\pi}{12}$ est un argument de $z_{A'}$.