EXERCICE 4 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

La feuille **annexe** donnée portera les constructions demandées au cours de l'exercice.
Cette feuille est à rendre avec la copie.
Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, le point A a pour affixe i.
On nomme f l'application qui, à tout point M d'affixe z avec $z \neq i$ associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{-z^2}{z-i}.$$

Le but de l'exercice est de construire géométriquement le point M' connaissant le point M.

1) Un exemple.
On considère un point K d'affixe $1+i$.

a) Placer le point K.

b) Déterminer l'affixe du point K' image de K par f.

c) Placer le point K'.

2) Des points pour lesquels le problème ne se pose pas.

a) On considère le point L d'affixe $\frac{i}{2}$. Déterminer son image L' par f. Que remarque-t-on ?

b) Un point est dit invariant par f s'il est confondu avec son image.
Démontrer qu'il existe deux points invariants par f dont on déterminera les affixes.

3) Un procédé de construction.

On nomme G l'isobarycentre des points A, M, et M', et g l'affixe de G.

a) Vérifier l'égalité $g = \frac{1}{3(z-i)}$.

b) En déduire que si M est un point du cercle de centre A de rayon r, alors G est un point du cercle de centre O de rayon $\frac{1}{3r}$.

c) Démontrer que $\arg g = -\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AM}\right)$.

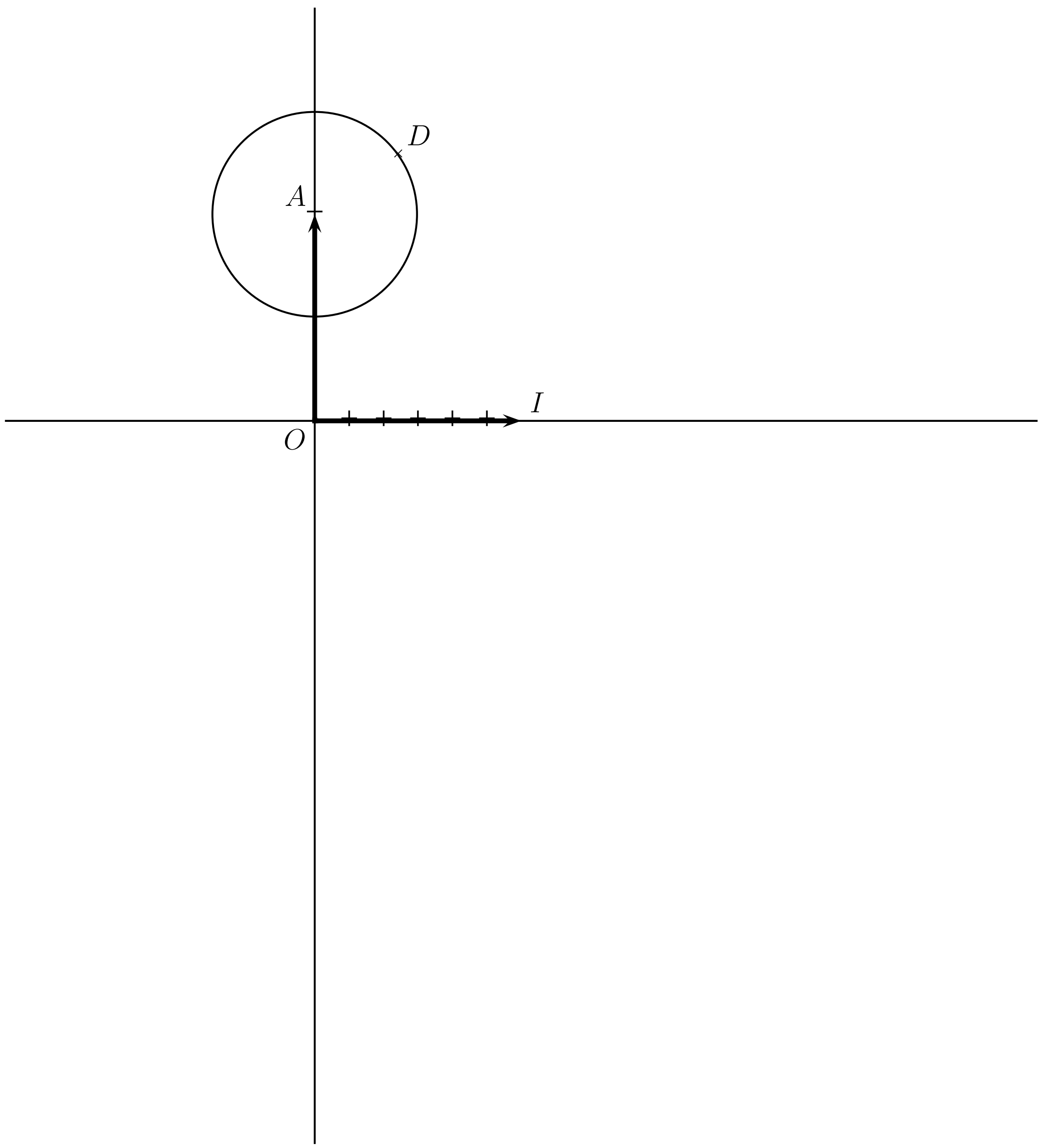
d) Sur la feuille annexe, on a marqué un point D sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$.
On nomme D' l'image de D par f. Déduire des questions précédentes la construction du point D' et la réaliser sur la **figure annexe à rendre avec la copie**.

ANNEXE

A rendre avec la copie

EXERCICE 4

Sur la figure ci-dessous le segment $[OI]$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OI}$ est partagé en six segments d'égale longueur.



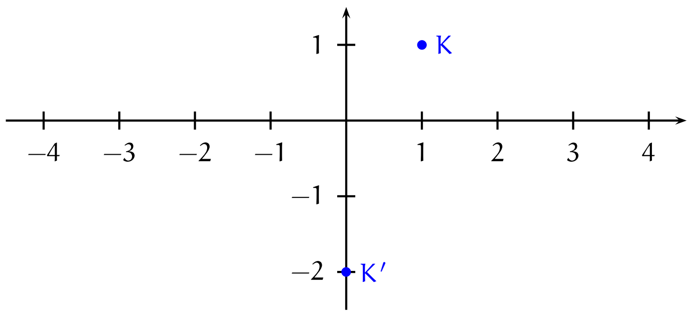
EXERCICE 4

1) a) voir plus loin

b) $z_{K'} = \dfrac{-(1+i)^2}{(1+i)-i} = \dfrac{-(1+2i-1)}{1} = -2i.$

$$\boxed{z_{K'} = -2i.}$$

a) et c)



2) a) $z_{L'} = \dfrac{-\left(\dfrac{i}{2}\right)^2}{\dfrac{i}{2}-i} = \dfrac{1/4}{-i/2} = \dfrac{1}{-2i} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{i}{(-i)i} = \dfrac{i}{2}.$

$$\boxed{z_{L'} = \frac{i}{2}.}$$

En particulier $L' = L$ et donc le point L est invariant par f.

b) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$.

$$z' = z \Leftrightarrow \frac{-z^2}{z-i} = z \Leftrightarrow -z^2 = z(z-i) \Leftrightarrow 2z^2 - iz = 0 \Leftrightarrow z(2z-i) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = \frac{i}{2}.$$

Comme 0 et $\dfrac{i}{2}$ appartiennent à $\mathbb{C} \setminus \{i\}$,

$$\boxed{f \text{ admet exactement deux points invariants, les points } O \text{ et } L \text{ d'affixes respectives } 0 \text{ et } \frac{i}{2}.}$$

3) Un procédé de construction.

a) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$.

$$g = \frac{1}{3}(z_A + z + z') = \frac{1}{3}\left(i + z - \frac{z^2}{z-i}\right) = \frac{(z+i)(z-i) - z^2}{3(z-i)} = \frac{z^2 - i^2 - z^2}{3(z-i)} = \frac{1}{3(z-i)}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout complexe } z \in \mathbb{C} \setminus \{i\},\ g = \frac{1}{3(z-i)}.}$$

b) Soient r un réel strictement positif et M un point du cercle de centre A et de rayon r. Alors $|z-i| = r$ et en particulier, $z \neq i$. De plus,

$$OG = |g| = \left|\frac{1}{3(z-i)}\right| = \frac{1}{3|z-i|} = \frac{1}{3r}.$$

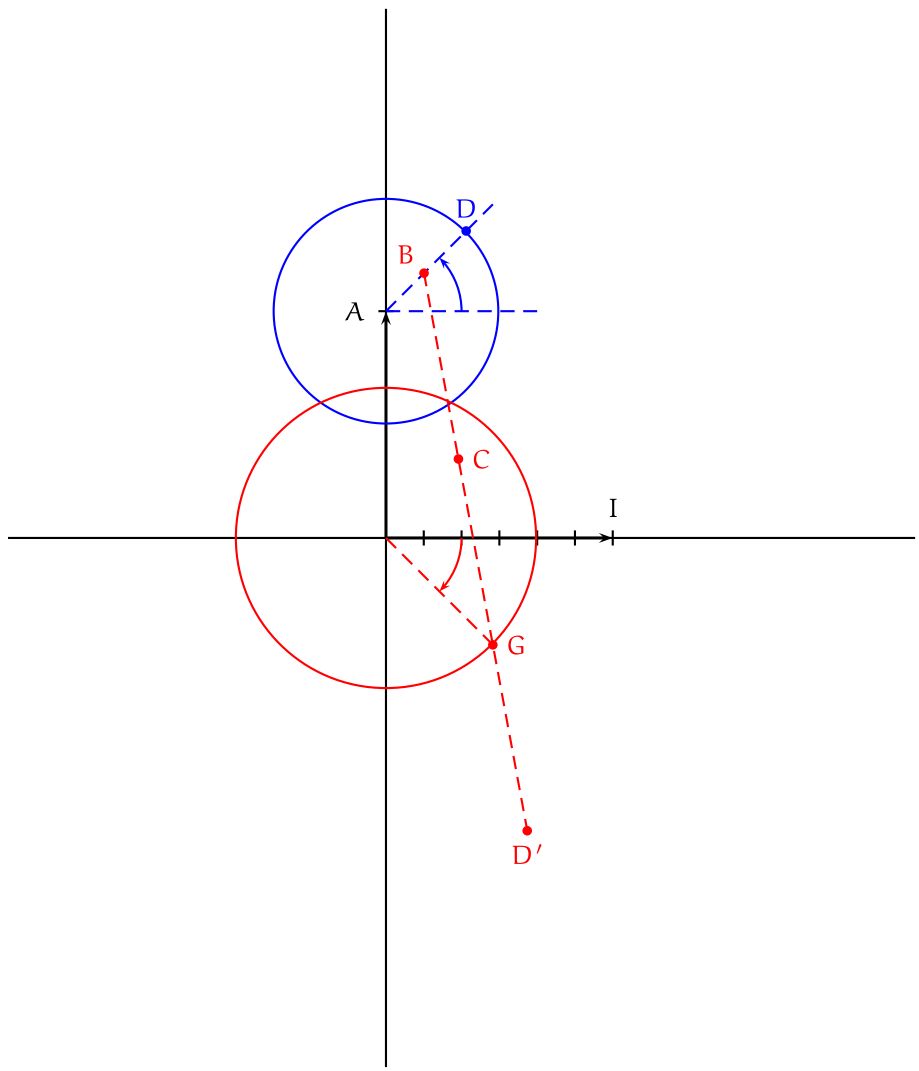
Donc G appartient au cercle de centre O et de rayon $\dfrac{1}{3r}$.

c) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$.

$$\arg(g) = \arg\left(\frac{1}{3(z-i)}\right) = -\arg(3(z-i)) = -\arg(z-i) = -\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}\right).$$

$$\boxed{\arg(g) = -\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}\right).}$$

d) Ici $r = \frac{1}{2}$. On construit alors G. G est sur le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{3r} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ ce qui correspond à 4 graduations. D'autre part, $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OG}\right) = -\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AD}\right)$.



Il reste à construire le point D' tel que G soit le centre de gravité du triangle ADD'. On note B le milieu du segment[AD] puis C le milieu du segment [BG]. On sait alors que $\overrightarrow{BD'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BG}$ ou encore $\overrightarrow{GD'} = \overrightarrow{CG}$ ou enfin D' est le symétrique de C par rapport à G.

