

EXERCICE 4 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

La feuille **annexe** donnée portera les constructions demandées au cours de l'exercice.

Cette feuille est à rendre avec la copie.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , le point A a pour affixe i .

On nomme f l'application qui, à tout point M d'affixe z avec $z \neq i$ associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{-z^2}{z - i}.$$

Le but de l'exercice est de construire géométriquement le point M' connaissant le point M .

1) Un exemple.

On considère un point K d'affixe $1 + i$.

- Placer le point K .
- Déterminer l'affixe du point K' image de K par f .
- Placer le point K' .

2) Des points pour lesquels le problème ne se pose pas.

- On considère le point L d'affixe $\frac{i}{2}$. Déterminer son image L' par f . Que remarque-t-on ?
- Un point est dit invariant par f s'il est confondu avec son image.
Démontrer qu'il existe deux points invariants par f dont on déterminera les affixes.

3) Un procédé de construction.

On nomme G l'isobarycentre des points A , M , et M' , et g l'affixe de G .

- Vérifier l'égalité $g = \frac{1}{3(z - i)}$.
- En déduire que si M est un point du cercle de centre A de rayon r , alors G est un point du cercle de centre O de rayon $\frac{1}{3r}$.
- Démontrer que $\arg g = - \left(\vec{u}; \overrightarrow{AM} \right)$.
- Sur la feuille annexe, on a marqué un point D sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$.
On nomme D' l'image de D par f . Déduire des questions précédentes la construction du point D' et la réaliser sur la **figure annexe à rendre avec la copie**.

ANNEXE

A rendre avec la copie

EXERCICE 4

Sur la figure ci-dessous le segment $[OI]$ tel que $\vec{u} = \vec{OI}$ est partagé en six segments d'égale longueur.

