EXERCICE 3

Partie A. Quelques propriétés

1) Soit z un nombre complexe non nul.

$$|z'| = \left|-\frac{1}{\overline{z}}\right| = \left|\frac{1}{\overline{z}}\right| = \frac{1}{|\overline{z}|} = \frac{1}{|z|}.$$

D'autre part

$$\arg(z') = \arg\left(-\frac{1}{\overline{z}}\right) = \arg\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) + \pi = -\arg(\overline{z}) + \pi = \arg(z) + \pi \quad [2\pi].$$

$$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe non nul } z,\ |z'| = \frac{1}{|z|} \text{ et } \arg(z') = \arg(z) + \pi \quad [2\pi].}$$

2) Soit z un nombre complexe non nul. On a alors $M \neq O$ et $M' \neq O$ puis

$$\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}\right) - \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right) = \arg(z') - \arg(z) = \pi \quad [2\pi]$$

Ainsi, $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \pi \quad [2\pi]$ et on en déduit que

$$\boxed{\text{pour tout nombre complexe non nul } z, \text{ les points } O,\ M \text{ et } M' \text{ sont alignés.}}$$

3) Soit z un nombre complexe non nul.

$$\overline{z' + 1} = \overline{\left(-\frac{1}{\overline{z}} + 1\right)} = -\frac{1}{\overline{\overline{z}}} + 1 = -\frac{1}{z} + 1 = \frac{1}{z}(z - 1).$$

$$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe non nul } z,\ \overline{z' + 1} = \frac{1}{z}(z - 1).}$$

Partie B. Construction de l'image d'un point

1) $\mathscr{C}$ est le cercle de centre A et de rayon 1.

2) a) Soit M un point de $\mathscr{C}$ distinct de O. On a donc $z \neq 0$ et $|z - 1| = 1$. D'après les questions A-3) puis A-1), on a

$$|z' + 1| = \left|\overline{(z' + 1)}\right| = \left|\frac{1}{z}(z - 1)\right| = \frac{1}{|z|}|z - 1| = \frac{1}{|z|} = |z'|.$$

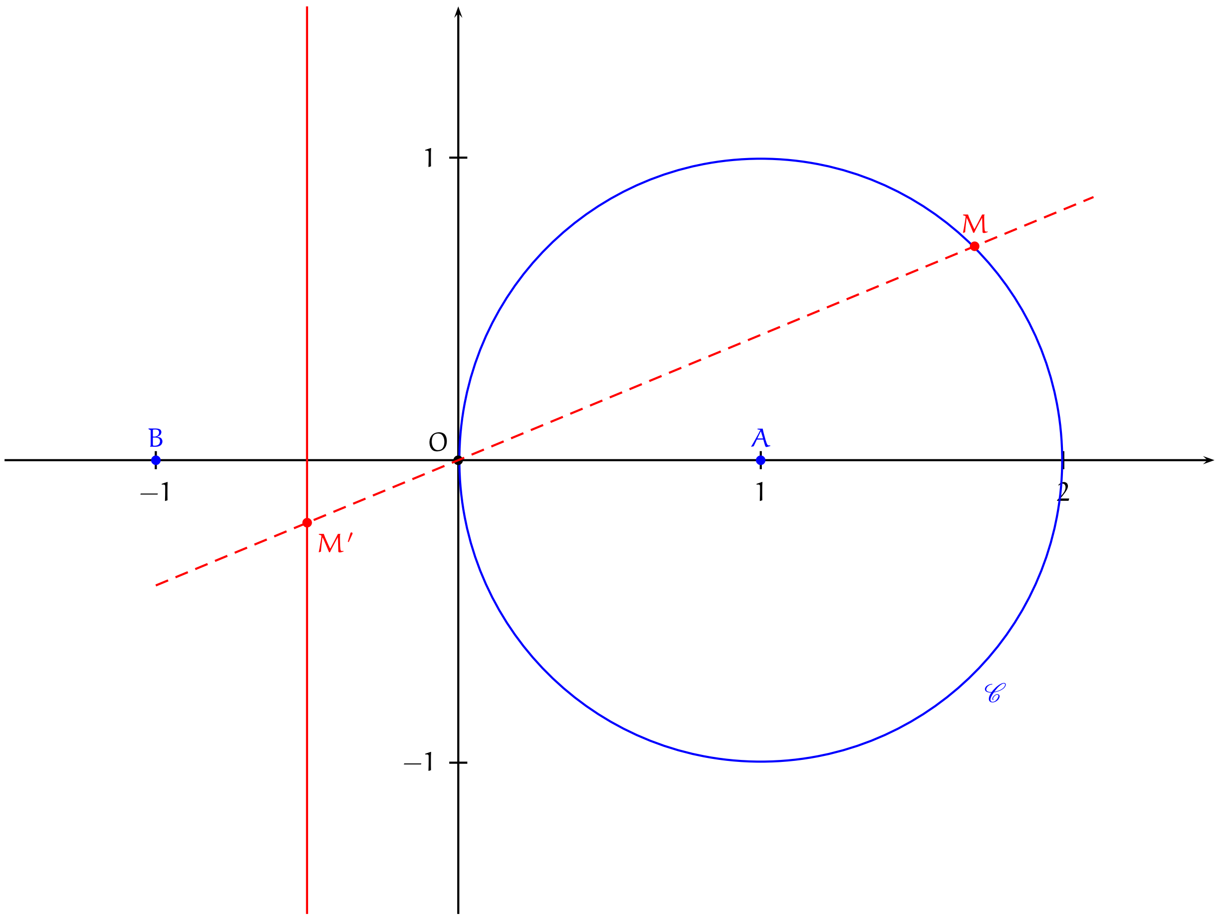
Cette égalité s'écrit encore $|z' - z_B| = |z'|$ et donc $BM' = OM'$. Ceci signifie que M' est sur la médiatrice du segment $[BO]$.

$$\boxed{\text{Si } M \text{ est un point de } \mathscr{C} \text{ distinct de } O,\ M' \text{ est sur la médiatrice du segment } [OB].}$$

b) Réciproquement, si $|z' + 1| = |z'|$, alors $\dfrac{1}{|z|}|z - 1| = \dfrac{1}{|z|}$ puis $|z - 1| = 1$ car $\dfrac{1}{|z|} \neq 0$.

$$\boxed{\text{Si } M' \text{ est sur la médiatrice du segment } [OB],\ M \text{ est un point de } \mathscr{C} \text{ distinct de } O.}$$

3) Soit M un point de $\mathscr{C}$. Le point M' est sur la médiatrice du segment $[BO]$ qui est la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$. De plus les points O, M et M' sont alignés. On en déduit une construction du point M' (voir figure page suivante).


1
M
B
O
A
−1
1
2
M′
𝒞
−1

