EXERCICE 3 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On prendra pour le dessin $\|\overrightarrow{u}\| = 4$ cm.
M est un point d'affixe z non nul. On désigne par M' le point d'affixe z' telle que :

$$z' = -\frac{1}{\overline{z}}$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z.

Partie A. Quelques propriétés

1) Soit z un nombre complexe non nul. Déterminer une relation entre les modules de z et z', puis une relation entre les arguments de z et z'.

2) Démontrer que les points O, M et M' sont alignés.

3) Démontrer que pour tout nombre complexe z non nul, on a l'égalité :

$$\overline{z' + 1} = \frac{1}{z}(z - 1).$$

Partie B. Construction de l'image d'un point

On désigne par A et B les deux points d'affixes respectives 1 et -1.
On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M du plan dont l'affixe vérifie :

$$|z - 1| = 1.$$

1) Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{C}$?

2) Soit M un point de $\mathscr{C}$ d'affixe z, distinct du point O.

a) Démontrer que $|z' + 1| = |z'|$. Interpréter géométriquement cette égalité.

b) Est-il vrai que si z' vérifie l'égalité $|z' + 1| = |z'|$, alors z vérifie l'égalité $|z - 1| = 1$?

3) Tracer l'ensemble $\mathscr{C}$ sur une figure. Si M est un point de $\mathscr{C}$, décrire et réaliser la construction du point M'.